粗路径驱动的随机微分方程保结构数值方法

黄楚荧

摘要

本文研究粗路径驱动的随机哈密尔顿系统辛几何算法和分数阶布朗运动驱动的 Cox-Ingersoll-Ross 模型保正数值方法. 对于粗路径驱动的随机哈密尔顿系统, 证明了相流几乎处处保持辛结构, 构造了保持离散辛结构的随机 Runge-Kutta 方法, 利用 Wong-Zakai 逼近和 Itô-Lyons 映射克服了粗路径不具备鞅性和独立增量性的困难, 给出了随机 Runge-Kutta 方法的轨道收敛阶; 若随机哈密尔顿系统的驱动过程为带 Hurst 参数$H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$的分数阶布朗运动, 运用分数阶微积分和 Hölder-Besov 嵌入等工具得到了随机 Runge-Kutta 方法的强收敛阶, 进而解决了 A. Deya、A. Neuenkirch 和 S. Tindel 提出的关于 **N**-阶 Euler 方法强收敛阶的猜想; 因粗路径关于时间几乎处处不可导, 基于 Wong-Zakai 逼近构造了一类新的随机修正方程, 利用 Hermite 多项式证明了粗路径驱动的随机哈密尔顿系统辛几何算法的随机修正方程仍为随机哈密尔顿系统, 进而揭示了随机辛几何算法的内在数学机理, 解释了随机辛几何算法用于数值求解粗路径驱动的随机哈密尔顿系统的优越性. 对于带 Hurst 参数 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 的分数阶布朗运动驱动的 Cox-Ingersoll-Ross 模型, 鉴于该模型刻画金融市场中具有正性的利率, 通过 Lamperti 变换得到了带非全局 Lipschitz 系数的辅助方程, 应用向后 Euler 方法于辅助方程并结合 Lamperti 逆变换构造了保正的数值方法, 利用 Malliavin 分析证明了向后 Euler 方法的强收敛阶为 1, 这是第一个关于分数阶布朗运动驱动的带非全局 Lipschitz 系数方程数值方法的最优强收敛阶结果.

关键词：随机哈密尔顿系统， Cox-Ingersoll-Ross 模型, 粗路径, 分数阶布朗运动, 随机保结构数值方法