# 热驱动不可压磁流体问题的数值方法

丁倩倩

## 摘 要

本文围绕一般 Lipschitz 区域上的三维非线性热磁流体耦合的全离散有限元方法及其理论分析进行展开, 主要包括两部分内容, 第一部分研究了系数依赖于温度的热耦合磁流体动力学方程组, 第二部分则集中研究了含焦耳热和耗散热的热耦合磁流体动力学方程组.

一般来说, 导电流体对温度比较敏感. 即使在等压条件下, 流体 (例如油、润滑剂、金属合金和地球表面下的岩浆等) 温度的升高会引起其粘度的强烈变化. 本文第一部分内容针对系数依赖温度的磁流体问题做了以下两个工作:

1. 系统地研究了非定常的系数依赖温度的热磁流体耦合模型. 设计了新的全离散有限元数值格式, 并通过 Lax-Milgram 定理证明了离散解的适定性; 当网格尺寸和时间步长趋于零时, 证明了全离散问题的解收敛到连续问题的弱解; 在额外的光滑性假设下, 进一步证明了弱解的唯一性. 特别地, 在模型弱解的低正则性假设下, 证明了各个变量的无条件收敛性, 且用三维数值算例验证了理论分析的正确性.

2. 分析了定常的系数依赖温度的热磁流体耦合模型. 应用 Leray-Schauder 原理证明了模型弱解的唯一性. 设计了离散的有限元数值格式, 并证明了离散解是唯一的. 在模型弱解的低正则性假设下, 证明了速度、压力、温度、磁感应和拉格朗日乘子的无条件最优误差估计, 并通过三维数值实验验证了离散解的最优误差阶.

当电流通过导电液体时, 会产生焦耳热. 焦耳热引起的非均匀温度变化能够影响电场分布, 因此磁流体系统耦合热模型在工程技术各个领域的应用不容忽视. 本文第二部分内容针对含二次热源的磁流体问题做了以下工作:

提出了非定常的带焦耳热和耗散热的热磁流体耦合模型. 鉴于焦耳热和耗散热的低正则性, 先对其进行正则化处理; 正则化问题的时间离散是基于欧拉半隐格式, 当时间步长趋于零时, 证明了正则化问题的时间离散解收敛到正则化问题的解; 再令正则化参数趋于零, 进一步验证了正则化问题的解收敛到原模型的弱解, 且该弱解是唯一 (在额外的光滑性假设下) 的. 最后, 建立了新的全离散有限元格式, 证明了数值解的无条件最优误差估计, 且通过三维数值算例验证了有限元格式的正确性和有效性.

**关键词：**磁流体动力学方程组, 变系数, 焦耳热, 混合有限元方法, 低正则性, 收敛性分析, 无条件稳定性, 误差估计