多重网格法的代数理论

徐雪枫

摘 要

多重网格法是求解偏微分方程大规模离散代数系统最有效的数值方法之一，它可以看作是一些传统松弛迭代法（例如：Jacobi 和 Gauss–Seidel 方法）的加速。多重网格法大致可分为几何多重网格法和代数多重网格法。由于几何多重网格法的构造是基于具有分层结构的网格，这限制了其在很多实际问题中的应用。对于无结构网格上的离散问题，代数多重网格法显示出了很强的潜力，它已被广泛应用于计算流体力学、结构力学、汽车工程仿真等实际问题的数值模拟。

作为一种迭代法，多重网格法的收敛理论无疑是人们非常关心的问题，文献中已有丰富的研究成果。本文系统地建立了多重网格法的代数理论，并给出了一些核心理论的新证明。全文分为六章：

第一章，我们介绍多重网格法的基本思想、算法原理和发展状况，并简单介绍本文的主要研究成果。

第二章，我们讨论两层网格法的代数理论。对于精确两层网格法，我们以新的分析方法证明其收敛率等式和误差传播算子谱的性质。对于非精确两层网格法，我们利用矩阵分析技巧和特征值不等式建立非精确两层网格法的收敛理论，并给出误差传播算子能量范数的上下界估计。特别地，当粗网格问题被精确求解时，我们的收敛性估计与精确两层网格法的收敛率等式一致。

第三章，我们研究多重网格法的代数理论。利用 V-循环多重网格法误差传播算子的显式表达和预条件子的极小化性质，我们得到 XZ-恒等式的一个新证明，并给出对应的“最优”向量分解。此外，基于子空间校正的思想，我们得到 V-循环多重网格法收敛率的一个新上界。通过比较可知：文献中已有的最好上界是新上界的一种特殊情形。

第四章，我们建立代数多重网格法中理想插值算子的新理论。具体来说，我们给出理想插值算子的充分条件、必要条件以及等价条件。传统观点普遍认为理想插值算子是唯一且稠密的，而新理论显示：理想插值算子具有多种取法，且可以设计出具有稀疏结构的理想插值算子。另外，我们给出一类理想插值算子的显式表达，它可以将一些常用的代数多重网格法（比如：SA-AMG、AMGe、ρAMGe 等）纳入到统一的框架下进行分析。

第五章，我们讨论光滑聚集代数多重网格法（SA-AMG）的收敛理论。我们说明如何保证光滑聚集代数多重网格法每一层上形成的粗网格矩阵都是对称正定矩阵，这是收敛性分析能够进行的前提。此外，我们还得到一个涉及第一类 Chebyshev 多项式的量的最优上界估计，它在光滑聚集代数多重网格法的收敛性分析中起到了重要作用。

第六章，我们对全文进行总结，并对代数多重网格法领域未来的研究方向作出展望。

关键词：两层网格法，多重网格法，理想插值算子，光滑聚集代数多重网格法