多尺度问题的区域分解算法

王义舒

摘要

在现代科学计算中，区域分解算法已成为求解偏微分方程的重要工具。本文主要工作是针对多尺度二阶椭圆问题的有限元离散代数系统设计区域分解算法，包括重叠型算法和非重叠型算法。本文将从算法设计、理论分析和数值实验等方面进行研究，具体可以分为如下三个部分：

第一部分首先给出了 Sobolev 空间的背景知识以及常用的有限元不等式。接着介绍了经典的两水平加性 Schwarz 方法的格式构造以及相关代数系统的条件数估计，同时介绍了子结构型非重叠区域分解法。最后简单给出了预优共轭梯度法的实现。

第二部分研究了二维多尺度问题的重叠型两水平加性 Schwarz 区域分解算法。首先基于局部“正交分解”的思想，构造一种新的“点基”型粗空间。在多尺度系数满足一定假设的条件下，证明了加性 Schwarz 预处理系统的条件数与多尺度系数跳跃无关。对于上面的“点基”函数，由于它具有单位分解性质和较好的鲁棒性，进一步通过它构造了改善谱基的粗空间，设计了重叠型区域分解算法。数值实验显示，针对多尺度系数呈复杂分布的情况，改善谱基的粗空间在维数较小的情况下，也能取得较好的计算效果。

第三部分研究了二维和三维的多尺度问题的非重叠型两水平加性 Schwarz 区域分解算法。首先对于二维问题，在粗空间上构造一种新的插值算子，对原始代数系统设计了非重叠型预条件子。在理论分析中给出了预处理系统的条件数估计，并对粗空间中的谱问题做了研究，得到了特征值和多尺度系数跳跃无关的充要条件。进一步把算法推广到三维问题，针对三维多尺度问题产生的 Schur 补系统设计了子结构算法，并且从理论上严格给出了算法的条件数分析。数值实验验证了算法的有效性。

关键词：多尺度，区域分解，Schwarz 理论，预条件子，子结构算法