大规模稀疏线性方程组的随机Kaczmarz方法

巫文婷

摘　要

Kaczmarz方法是求解大规模线性代数方程组的一个经典而有效的行处理迭代方法. 由于它形式简单, 在很多领域均得到了青睐和应用, 例如计算机断层扫描、图像重构、分布式计算与信号处理等. 2009年, Strohmer和Vershynin提出了随机Kaczmarz方法, 该方法具有期望指数收敛或"线性收敛"速率. 自此, 重新兴起了关于Kaczmarz方法的研究热潮. 然而, 随机Kaczmarz方法仅仅对于相容的线性代数方程组收敛. 当线性代数方程组不相容时, Leventhal和Lewis在2010年提出了随机坐标下降方法, Zouzias和Freris于2013年提出了随机扩展Kaczmarz方法. 影响随机Kaczmarz型迭代方法的收敛速率的关键在于其中所蕴含的用于选取每步迭代所需调用的系数矩阵中的目标行或者目标列的概率准则. 本论文主要针对有效概率准则的构造, 新的、且更加有效的用于求解相容或者不相容的大规模线性代数方程组的随机迭代方法的设计, 以及所提出的随机迭代方法收敛性质的分析等方面开展了系统深入的研究.

首先, 对于相容的亚定线性代数方程组, 我们推导出了由随机Kaczmarz方法所产生的迭代平均平方误差的精确表达式, 从而完备了已有的仅仅关于超定线性代数方程组的相应结果. 在此基础上, 我们进一步估计出了关于随机Kaczmarz方法收敛速率的上界. 理论分析和数值实验均表明, 该上界明显地改善了已有的上界.

第二, 对于相容的亚定或超定线性代数方程组, 为选取每步迭代所需调用的系数矩阵的目标行, 我们提出了一个全新且有效的概率准则, 并由此构造出了贪婪随机Kaczmarz方法. 我们证明了该方法可以收敛到相应线性代数方程组的唯一最小范数解. 理论分析证明, 贪婪随机Kaczmarz方法比随机Kaczmarz方法收敛得更快; 且数值实验表明, 贪婪随机Kaczmarz方法远比随机Kaczmarz方法更为高效.

第三, 通过在贪婪随机Kaczmarz方法的概率准则中引进一个松弛参数, 我们将其进一步推广, 得到了一簇松弛贪婪随机Kaczmarz方法. 我们证明了这簇方法的收敛性. 数值实验表明, 如果可以选取到合适的松弛参数, 这簇方法可以比贪婪随机Kaczmarz方法更为有效。

第四, 对于不相容的超定线性代数方程组, 通过对随机扩展Kaczmarz方法进一步改造, 我们提出了部分随机扩展Kaczmarz方法. 当系数矩阵列满秩时, 我们证明了该方法的收敛性, 并且得到了其期望收敛速率的上界. 在一定条件下, 我们证明了该上界可以比随机扩展Kaczmarz方法的上界更小. 此外, 数值实验也表明, 对于一些特定的问题, 部分随机扩展Kaczmarz方法比随机扩展Kaczmarz方法更为有效.

最后, 对于超定线性代数方程组, 为选取每步迭代所需调用的系数矩阵的目标列, 我们提出了一个有效的概率准则, 并由此构造出了贪婪随机坐标下降方法. 当系数矩阵列满秩时, 我们证明了该方法可以收敛到超定线性代数方程组的唯一最小二乘解. 理论分析阐明, 贪婪随机坐标下降方法的收敛速率比随机坐标下降方法更快; 数值实验表明, 贪婪随机坐标下降方法比随机坐标下降方法具有更高的计算效率.

关键词： 线性代数方程组, Kaczmarz方法, 坐标下降方法, 随机迭代, 收敛性质