求解 Helmholtz 方程和时谐 Maxwell 方程的最小二乘方法研究

宋荣荣

摘 要

众所周知，Helmholtz 方程和 Maxwell 方程组是模拟声波与电磁波传播规律的基本模型。研究求解大波数 Helmholtz 方程和大波数时谐 Maxwell 方程组的高效数值方法是当今科学工程计算领域中的一项重要而困难的课题。本文围绕这一课题得到了如下研究成果：

(1) 对一般(二维) 非均匀介质中的 Helmholtz 方程设计了一种新型的最小二乘离散化方法。其主要思想是：在两个相邻单元交界面上引进一个辅助未知量，在每个单元上以辅助未知量为边界条件求解局部 Helmholtz 方程，由局部解在相邻单元交界面上的跳量信息定义一个二次泛函，求解该二次泛函对应的最小化问题得到辅助未知量。由新方法所导出的离散代数系统是 Hermitian 正定的，而且与未知量定义在单元内部的其他方法相比含有更少的未知量，因此求解该代数系统更加便宜。通过发展一系列的技巧，在理论上证明了在适当假定下由新方法所产生的逼近解具有渐进最优的误差估计，且只有很小的“波数污染”。数值结果表明，本文提出的新型最小二乘方法对求解一般非均匀介质中的大波数 Helmholtz 方程非常有效。

(2) 对由新型最小二乘方法离散 Helmholtz 方程所得到的代数系统构造了一种新颖的子结构区域分解预条件子。在该预条件子中定义了比著名的 BDDC 方法更有效的粗求解器。数值结果表明该预条件子关于波数有相对稳定的收敛性，即随着波数的增大和网格的加密，相应 PCG 方法的迭代次数增加得比较缓慢。因此该预条件子对大波数情形也非常有效。

(3) 对三维分层介质中的时谐 Maxwell 方程组提出了一种新的平面波最小二乘方法。其核心思想是在现有平面波最小二乘方法的目标泛函中新添加待求解函数的法向分量的跳量信息。在理论上证明了由新方法所产生的逼近解具有理想的$L2$误差估计，这也是对时谐 Maxwell 方程组平面波方法的第一个$L2$ 误差估计。数值结果表明，利用新的平面波最小二乘方法可得到比现有的平面波最小二乘方法精度更高的逼近解，而且新方法也几乎没有“波数污染”。

关键词： Helmholtz 方程，时谐 Maxwell 方程，最小二乘方法，误差估计，预条件子