无感应磁流体方程组的有限元方法分析

摘　要

磁流体力学(MHD)在科学和工程问题上的重要性日益增加。许多重要的磁流体流动都涉及一种粘性的、不可压缩的、与电磁场相互作用的导电流体。当流体中电流产生的磁感应与外部磁感应相比微不足道时，或者对于低磁雷诺数的情形，一般采用无感磁流体方程(IMHD)来模拟磁流体系统。在物理上，无感应磁流体系统具有保持电荷守恒定律的特点，即$\mathrm{div}\Vector{J}=0$。在实际工程应用中，电荷守恒是保证磁流体数值模拟计算精度的一个重要性质。本文主要研究非稳态和稳态无感应磁流体方程满足电荷守恒的有限元方法及其数值分析。 论文主题包括以下两部分内容。

本文第一部分提出了一种求解非稳态无感应磁流体力学方程的稳定的混合有限元方法。在变量$(\Vector{u},p,\Vector{J},\phi)$基于空间$\textbf{H}^{1}(\Omega) \times L^{2}(\Omega) \times \textbf{H}({\text{div},\Omega}) \times L^{2}(\Omega)$变分框架下所提出的混合变分模型中，Navier-Stokes 方程中的变量 $(\Vector{u}, p)$用稳定的连续有限元离散，电流密度用散度协调有限元离散。该格式的优点是在每个时间层上离散电流密度能够保持电荷守恒特性。我们证明连续问题及其全离散 Euler 半隐格式都是适定的。在精确解的低正则性假设下，证明了速度、压力和电流密度的无条件收敛性和数值解的误差估计。值得指出的是，我们的误差估计结果对于 Navier-Stokes 方程理论也是全新的。
最后，我们通过数值算例来验证理论分析的正确性和有限元离散系统保持电荷守恒性，同时通过测试 Benchmark 方腔流问题，揭示了流体的导电性能对流体涡度的影响。

本文第二部分研究稳态无感应磁流体方程组的有限元离散。我们首先提出了保持电荷守恒的有限元数值格式。然后利用 Brouwer 不动点定理证明了连续问题和有限元离散问题解的存在性和唯一性。其次，我们给出了有限元离散方程数值解
在空间$\textbf{H}^{1}(\Omega) \times L^{2}(\Omega) \times \textbf{H}({\text{div},\Omega}) \times L^{2}(\Omega)$范数下的先验误差估计。随后又利用对偶技巧估计了速度的$\Vector{L}^{2}$误差。在后半部分中，我们提出了无感应 MHD 方程的自适应有限元算法。我们首先证明了一个有用的 Transfer 定理，
然后基于 Helmholtz 分解定理，推导出了残差型后验误差估计子。更近一步，我们严格地证明了所提出的误差估计子相对于真实误差的上界和下界，揭示了后验误差估计子的可靠性和有效性。基于后验误差估计子，本文建立了一个自适应有限元算法。最后， 我们通过数值模拟验证了理论分析的正确性和基于误差指示子的自适应有限元算法的最优性。

关键字： 无感应磁流体力学，电荷守恒，欧拉半隐格式，散度协调有限元，混合有限元法，先验误差估计，后验误差估计，自适应有限元算法