三维非结构网格高阶扩展有限元算法及实现

刘化庆

摘要

界面问题在科学与工程计算中具有非常重要的实际应用价值和理论研究意义。实际问题中边界和界面的复杂几何结构使得传统的数值计算方法在贴体网格构造、高阶离散格式设计和数学理论分析等方面都面临着巨大的挑战。PHG (Parallel Hierarchical Grid) 是 “科学与工程计算国家重点实验室” 正在发展的一个有限元并行程序开发平台。本文基于 PHG 平台开展三维界面问题的非结构网格高阶扩展有限元算法研究和并行程序研制，主要内容包括：

- 提出了一个通用的，健壮的，任意高阶的被曲面界定的区域上的或位于曲面上的数值积分算法，并在 PHG 平台上进行了实现。它支持应用非结构网格高阶扩展有限元方法求解界面问题，为界面问题的高阶数值方法的研究提供了基础。
- 开展了三维椭圆界面问题和麦克斯韦界面问题的非结构网格高阶扩展有限元方法的研究和并行程序研制，通过数值算例验证了扩展有限元方法先验误差估计的最优收敛性和曲面数值积分算法的有效性和健壮性。
- 给出了 $\boldsymbol{H}(\mathrm{curl};\Omega)$ – 麦克斯韦界面问题的非结构网格高阶扩展有限元方法的先验误差估计的最优收敛性，讨论了对称和非对称两种情形，分别给出了收敛性分析和证明。

论文的主要成果和创新体现在如下三个方面：

在曲面数值积分算法方面，本文提出了一个通用的，健壮的，任意高阶的数值积分算法。该算法使用一种直接的方法，将三维的体积分或二维的面积分分解成多重一维线积分，应用高斯积分公式计算一维线积分。该算法通过增加一维高斯积分公式的阶数可以达到任意高阶的精度，且不需要被积函数和水平集函数的先验知识。通过数值算例验证了该算法的健壮性和有效性。

在界面问题的高阶数值方法方面，本文采用了非结构网格高阶扩展有限元方法求解界面问题。扩展有限元方法使用非匹配界面的网格，可以生成高阶离散格式，且先验误差估计具有最优收敛阶。目前，对椭圆问题，验证了 Lagrange $H^1(\Omega)$ – 协调有限元的 $1-4$ 阶的最优收敛阶。对麦克斯韦问题，验证了第二类 Nédélec $\boldsymbol{H}(\mathrm{curl};\Omega)$ – 协调有限元的 $1-3$ 阶的最优收敛阶。

在麦克斯韦界面问题的数值方法的理论分析方面，本文给出了非结构网格高阶扩展有限元方法的先验误差估计的最优收敛性。在分析和证明中，我们引入了界面单元上的迹和逆不等式，该不等式在非贴体界面罚有限元方法的理论分析中起到关键的作用。此外，我们引入了标准 Sobolev 空间的延拓性质和第二类 Nédélec 有限元空间的近似性质等。在对称和非对称两种情形下，我们给出了有限元离散的双线性形式的连续性和强制性及数值解在 $\boldsymbol{H}(\mathrm{curl})$ 能量范数和 $\boldsymbol{L}^2$ 范数下的误差估计。

关键词：扩展有限元，高阶数值积分，四面体网格，椭圆界面问题，麦克斯韦界面问题