相位恢复及相关问题的理论和算法

黄猛

摘要

相位恢复主要研究通过无相位的观测数据恢复一个离散信号或连续函数，其广泛应用于物理学和生物信息学的各个方面，包括 X 射线晶体学、量子力学、生物信息学、雷达成像、相干衍射成像等. 本文主要针对相位恢复及相关问题的理论和算法进行研究. 在理论方面，首先分析了求解相位恢复问题的非线性二次模型，给出其恢复性能和抗噪能力，其次分析了广义仿射相位恢复问题的可恢复性、几乎处处可恢复性以及最小观测次数；在算法方面，我们主要给出了求解秩一观测低秩矩阵恢复的非凸指数型梯度算法.

首先，对于相位恢复问题，常用的非凸求解算法均基于残差极小化，并由此导出两个模型：二次模型和四次模型. 大量的数值试验显示，二次模型比四次模型有更快的收敛性和更好的稳定性，但缺乏理论分析. 故此，本文首先针对二次模型分析其降噪能力，给出了二次模型恢复性能的理论保障. 具体地，我们证明了该模型的恢复误差可以被 $\|\eta\|_2/\sqrt{m}$ 控制住，其中 η 是噪声向量，m 是观测次数. 这意味着相位恢复问题的噪声可以通过二次模型显著降低且恢复误差可以被观测次数的平均噪声控制住. 进一步，我们还证明了这个误差界是最优的. 对比线性最小二乘模型的误差界，两者之间有一定的差异，从而说明了二次模型与线性最小二乘模型的降噪能力有着本质不同. 另外，对于稀疏相位恢复问题，我们同时考虑了约束非线性 Lasso 模型和无约束拉格朗日 Lasso 模型，并给出了类似的误差估计和恢复性能保障.

其次，我们分析了秩一观测低秩矩阵恢复问题，该问题广泛应用于二次回归和量子态断层扫描中. 如果要恢复的矩阵秩为 1，那么秩一观测低秩矩阵恢复问题便退化为相位恢复问题. 由于该问题已有的求解算法均需要较大的观测量级才能保证收敛性，因此本文提出一个新的迭代算法，称为指数型梯度算法，

可以在近似最优的观测量级下线性收敛到精确解. 该算法首先需要通过一个初始化过程得到一个比较好的初值，然后利用指数型梯度进行迭代. 具体地，我们提出了一个新的初始化选取方法，仅需 $O(nr)$ 个观测便能给出一个比较好的初值；然后利用指数型梯度进行迭代，可以在 $O\left(nr\log(cr)\right)$ 个观测下线性收敛到精确解，其中 n, r 分别表示未知矩阵的维数和秩. 相较于之前的算法，我们的方法显著减少了采样复杂度.

最后，我们分析了广义仿射相位恢复问题以及广义仿射几乎处处可恢复性问题. 广义仿射相位恢复源于全息摄影以及具有先验信息的相位恢复问题，是经典相位恢复问题的推广. 针对广义仿射相位恢复问题，我们建立了其可恢复的一般框架，给出了一系列充分必要条件. 然后，我们给出了该问题在实数域和复数域上的最小观测次数. 我们证明了要想使得一组观测具有广义仿射相位可恢复性质，实数域上的观测次数 $m \geq d + \lfloor d/r \rfloor$，复数域上相应的结果为 $m \geq 2d + \lfloor d/r \rfloor$，其中 d 是信号的维数，r 是观测矩阵的秩. 我们同时也证明了当 $r \mid d$ 时，上述界均是紧的. 特别地，这些结果说明了广义仿射相位恢复问题可以通过增加矩阵的秩减少观测次数. 利用代数几何的工具，我们接下来证明了实数域上 $m \geq 2d$ (复数域 $m \geq 4d-1$) 个一般位置的观测均具有广义仿射相位恢复性质. 最后，针对广义仿射几乎处处可恢复性问题，我们证明了实数域上 $m \geq d+1$ (复数域 $m \geq 2d+1$) 个一般位置的观测具有广义仿射相位几乎处处可恢复性质.

关键词： 相位恢复，低秩矩阵恢复，广义仿射相位恢复，最小观测次数