整数和连续背包多面体中割平面算法的研究

陈伟坤

摘要

混合整数规划在工业、经济、国防、物流等领域有着重要应用，其理论研究受到众多学者的关注．割平面算法是求解整数规划最有效的算法之一，探究快速有效的割平面算法仍是当今热点问题．本文从理论、算法的角度考察割平面算法中相关的问题．特别地，我们探讨基于无界整数背包集合、有界整数背包集合、连续背包集合、可分连续背包集合的有效不等式及其相关问题．

关于无界整数背包集合，我们考察序列升维不等式．该不等式可通过逐步地升维一条含有一个变量的基不等式得到．我们给出序列升维不等式的计算问题是 NP-难的证明．通过利用升维不等式的极大面性质，我们证明，某些升维系数能够提前被固定，从而极大降低实际计算成本．此外，我们还构造快速伪多项式时间的算法，并进一步讨论该不等式与著名的混合圆整不等式的关系．在特定的条件下，该不等式强于混合圆整不等式．最后，数值实验表明基于该不等式的割平面算法对求解整数规划问题是有效的．

关于有界整数背包集合，我们研究覆盖不等式的进一步推广．特别地，我们推出基于混合圆整技术和序列升维技术的两种覆盖不等式．这两种新的覆盖不等式都强于一些已有的覆盖不等式．在基于序列升维技术的覆盖不等式的基础上，我们进一步采用升维技术，得到定义有界整数背包多面体的一个极大面的一般序列升维覆盖不等式．该不等式推广了著名的 0-1 背包集合上序列升维覆盖不等式．我们进一步探讨一般的序列升维覆盖不等式的计算复杂性．事实上，即便在 0-1 背包集合上，是否存在多项式时间的算法计算序列升维覆盖不等式这一问题仍未解决．Gu 等 (1999) 提出了这一公开问题．我们刻画了此问题的计算复杂性．我们证明，序列升维覆盖不等式的计算问题是 NP -难的．

关于连续背包集合，我们探究系数加强不等式，它可以在连续背包约束的基础上，先松弛连续变量再借助整数变量系数加强的技术得到．我们从两方面考虑该不等式的分离问题，并给出两种多项式时间的分离算法．进一步，作为应用，我们分析连续配置背包集合的多面体性质，它是在连续背包集合的基础上，加上一条集合配置约束得到．我们证明，系数加强不等式以及该集合的约束对应的不等式刻画连续配置背包多面体．

最后，我们讨论连续背包集合一种特例——可分连续背包集合．该类集合要求任意两个整数变量的系数之间有整数倍数关系．Wolsey 和 Yaman (2016) 证明了划分不等式及其约束刻画了可分的连续背包多面体．然而是否存在多项式时间的算法求解划分不等式的分离问题仍未得到解决．Wolsey 和 Yaman (2016) 指出了这一问题．我们肯定性地回答这一问题．我们针对求解系数加强不等式分离问题的一种算法做进一步推广，并给出新的求解划分不等式分离问题的多项式时间 算法．

关键词：整数规划，割平面，连续/整数背包多面体，系数加强，序列升维