具有非全局 Lipschitz 系数的半线性随机发展型方程数值方法的收敛性分析

崔建波

摘要

具有非全局 Lipschitz 系数的半线性随机发展型方程数值方法的收敛性分析是十分困难的重要问题,近年来吸引了越来越多学者的关注. 为处理方程系数的强非线性性和噪声的低正则性, 需发展新的方法和工具, 以给出解的正则性估计和建立数值方法的收敛性分析理论. 本文主要针对随机 Allen--Cahn 方程、随机 Cahn--Hilliard 方程和随机非线性 Schrodinger 方程数值方法的收敛性开展研究.

为数值求解带单调系数的随机 Allen--Cahn 方程,本文分别考虑了时间分裂方法和空间有限元方法.基于热核半群的磨光作用,给出了方程解的正则性估计,并得到了这两类数值方法的强收敛率. 提出了基于分裂算法的新正则化技巧,得到了对应Kolmogorov 方程的正则性估计, 进而建立了有限元方法的最优弱误差估计, 首次解决了该方程数值方法弱收敛性与弱收敛率问题.

对于非线性系数仅在负指数 Sobolev 空间中单调的随机 Cahn--Hilliard 方程, 迄今数值方法的收敛率尚无结果. 利用Sobolev 插值不等式,提出了数值方法收敛率的分析框架. 基于空间谱Galerkin 方法和时间隐 Euler 方法, 构造了全离散数值方法. 通过构造辅助过程, 首次给出了该方程数值方法在空间方向上的最优强收敛率和时间方向上的超收敛率.

针对随机 Schrodinger 方程, 通过研究指数可积性及其对应 Kolmogorov 方程, 克服了非线性系数在任意 Sobolev 空间中非单调且主导算子生成的半群无磨光作用的困难, 提出了数值方法强弱收敛率的分析方法; 给出了精确解和时间分裂方法数值解的指数可积性及其对应Kolmogorov 方程的正则性估计, 并首次得到了该方程数值方法的最优强弱收敛率.

关键词：非全局 Lipschitz 系数, 随机 Allen--Cahn 方程, 随机 Cahn--Hilliard 方程,随机 Schrodinger 方程,数值方法,强收敛率, 弱收敛率.