三类一阶优化算法研究

曾燎原

随着信息科学的发展, 最优化方法在图像处理、机器学习 (尤其是深度学习) 等领域的地位越来越重要. 一阶优化算法具有迭代格式简单、易于实现、存储量少、计算量小的特点, 非常适用于求解这些领域中出现的大规模优化问题. 本论文研究了三类一阶优化算法, 包括用于求解多目标优化问题的梯度下降方法、用于求解无约束凸优化问题的一阶加速方法和求解盒子约束非凸二次规划的交替方向乘子法.

对于 Fliege 等人提出的求解多目标优化问题的梯度下降方法, 我们分析了该方法用于求解无约束凸多目标优化问题时的收敛性和收敛速度. 结合该方法中使用的下降方向的特殊性质和单目标凸优化中证明梯度方法收敛性的技巧, 证明了凸多目标优化中常数步长梯度下降方法的全局最优性. 我们发现, 对于多目标优化的梯度下降方法, 可以获得和单目标优化梯度下降方法相同的收敛速度阶, 在求解凸问题时函数值序列具有 $O(1/k)$ 次线性收敛速度, 在求解强凸问题时函数值序列和点列都具有线性收敛速度. 此外, 我们将收敛速度的相关结果推广到了带 Armijo 线搜索的梯度下降方法.

对于常数步长 PRP 共轭梯度方法, 我们证明了该方法用于凸问题的 $O(1/k)$ 收敛速度和用于强凸问题的线性收敛速度. 该方法产生的方向满足充分下降性. 基于此, 结合 1983 年 Nesterov 提出的加速梯度方法的原理, 我们设计了加速 PRP 方法, 并证明了加速 PRP 方法求解凸问题的 $O(1/k^2)$ 收敛速度和求解强凸问题的线性收敛速度达到了一阶方法最优收敛速度的阶. 进一步地, 我们给出了对于一般下降方向的一阶加速框架, 只需要使用的下降方向满足充分下降性质, 即可结合加速技巧改进其收敛速度.

盒子约束非凸二次规划问题是一个经典的优化问题. 本论文中使用迭代格式具有显式解的交替方向乘子法和邻近交替方向乘子法求解该优化问题, 并分析了这两类方法用于这类特殊结构问题时的收敛性. 邻近交替方向乘子法实现简单, 每次迭代计算时间少, 用于求解大规模问题时所需的计算时间较少, 在和 MATLAB 中的 QUADPROG 进行比较时明显体现了这种优势. 为了求得该类非凸优化问题函数值更好的解, 我们提出了一种基于坐标下降思想设计的预处理算法, 并将结合预处理的邻近交替方向乘子法和求解同类问题的自带预处理的 MINQ8 软件进行了比较, 数值表明我们使用的方法在解的质量和计算时间上都具有一定的优势.

关键词：多目标优化, 梯度下降方法, PRP 共轭梯度方法, 一阶加速方法, 盒子约束非凸二次规划, 交替方向乘子法