高阶特征值问题的低复杂度有限元方法

席英霞

摘要

特征值问题是科学工程技术领域中的重要问题，在声学、电磁学、天体物理和流体力学等方面都有着广泛的应用。特征值问题的数值研究一直是计算数学中活跃的研究领域。高阶特征值问题的求解具有一定难度。这里，我们主要关注重调和特征值问题和透射特征值问题。

对于重调和特征值问题，我们构造一种多重混合元方法来高效地求解。此问题的原始变分形式，涉及到Sobolev 空间$H^2(\Omega)$。该空间的刚性很强，嵌套离散很难构造。据我们所知，除样条元外，BFS 元是唯一可用来构造嵌套有限元空间的元。关于该问题，已有一些混合元方法的工作。这些格式一般通过直接引入中间变量来构造。不过，在嵌套网格上的有限元离散格式依然很难嵌套。我们构造一种跟原始问题完全等价的混合格式。该格式允许自然的嵌套关系，可以进一步地构造多重校正方法进行求解。该方法具有如下优点：

- 在非凸区域上，不会产生伪特征值，理论分析和数值实验都证实了这一点；
- 该方法具有最优收敛阶和最优计算复杂度；
- 数值实验上，我们的格式给出特征值的上下界。

透射特征值问题是非自伴的，不包含在经典偏微分方程理论体系中。该问题也是非线性的，退化的，并且它的谱很复杂。该问题零特征值对应一个无穷维的特征函数空间。零特征值没有物理意义，且增加了求解难度。关于此问题，我们给出如下三种求解方法。

- 非协调元方法
  基于四阶变分形式，我们给出非协调元离散方法，比如Morley 元。相比于C^1 连续的协调元，比如Argyris 元，BFS 元，Morley 有限元自由度较少，提高了求解效率。从理论分析和数值实验上，我们均验证了该方法的有效性与高效性。

- 非线性递归曲线积分方法
  我们仍基于透射特征值问题的四阶变分形式，采用非协调元离散得到一个二次矩阵特征值问题。对这个非线性非自伴的特征值问题，采用递归曲线积分方法进行求解。已有的递归曲线积分方法针对的是线性矩阵特征值问题。我们将其推广到非线性情形，并从理论分析及数值实验上，说明该方法的有效性与高效性。

- 多重混合元方法
  对于高阶特征值问题，缺乏嵌套子问题，多重校正方法很少被考虑。本文从混合格式入手，构造了一种跟原始问题完全等价、稳定、嵌套的格式。进一步地，在此基础上，可以构造多重校正方法高效地求解。该格式基于三角形网格剖分，可以在任意多边形区域上求解。此外，该方法还有如下优点: 该格式与原始格式在连续层面是完全等价的，在非凸区域上，不会产生伪特征值；该方法具有最优收敛阶及最优计算复杂度。

关键字：重调和特征值，透射特征值，混合格式，多重校正方法，非协调元