# 随机非线性薛定谔方程不变测度的数值逼近

王旭

**摘要**

本文主要研究弱耗散型和守恒型随机非线性薛定谔方程不变测度的数值逼近. 弱耗散型随机非线性薛定谔方程解的分布随时间收敛到唯一不变测度，这是一个遍历测度. 为数值逼近该遍历测度，通过在空间方向上采用谱 Galerkin 方法、在时间方向上采用基于分裂技巧的修正隐欧拉方法，本文分别构造了空间半离散格式以及时空全离散格式. 基于数值格式的 Lyapunov 结构、强 Feller 性和不可约性，证明了空间半离散格式和时空全离散格式均具有唯一遍历不变测度，给出了不依赖于时间区间的弱误差分析，并得到数值格式的不变测度收敛到原方程不变测度的速率. 对于守恒型随机非线性薛定谔方程，不同于耗散型方程，它满足电荷守恒律并具有随机多辛几何结构. 该方程数值逼近的不变测度的存在性和唯一性仍是未解决的问题. 本文研究该方程有限维逼近的遍历性，旨在构造可以继承原方程物理性质和几何结构的数值格式，实现对有限维逼近不变测度的有效模拟. 为此，基于中心差分格式给出原方程的有限维逼近,通过构造控制系统和不变控制集，证明有限维逼近在等电荷面上具有唯一遍历不变测度. 进而，在时间方向上采用中点格式，构造了满足离散电荷守恒律并具有离散随机多辛几何结构的全离散格式. 利用有限维逼近对应的 Poisson 方程，证明了全离散数值解的时间平均也是不变测度的有效逼近,并给出了相应的收敛阶. 数值实验验证了理论分析结果.

关键词：随机非线性薛定谔方程，遍历性，不变测度，随机多辛格式，收敛阶