# 双调和方程的局部多水平方法

唐仕兵

## 摘要

双调和方程在现代科学与工程计算领域有着重要的应用背景，而多水平算法是求解该类问题最为有效的算法之一。本文的主要工作是研究基于自适应有限元的局部多水平算法，根据有限元空间的不同分为协调元和非协调元多水平算法，包括通常的多重网格算法和基于空间多水平分裂的预处理法，并具体应用到双调和方程。本文将从算法设计、理论分析和数值实验等方面进行研究，具体可分为如下三个部分。

第一部分首先给出了Sobolev 空间及有限元方法的一些基本知识，对双调和方程及其离散做了简单的介绍，然后给出了自适应算法的基本理论，同时介绍了多水平算法的基本理论和收敛性分析框架。

第二部分研究了求解双调和方程自适应协调有限元离散问题的局部加性和乘性多水平算法。通过设计稳定的空间分解，定义了局部加性Jacobi 磨光算子和局部乘性Gauss-Seidel 磨光算子，该类局部磨光算子只需要在当前网格层新增自由度及其邻近自由度做磨光，从而保证了算法的计算复杂度达到最优。基于Schwarz 理论，得到相应的局部多水平算法的一致收敛性，即收敛率与网格层数和尺度无关。

第三部分研究了求解双调和方程自适应非协调有限元离散问题的局部加性和乘性多水平算法。通过构造一类稳定的网格转移算子，建立起非协调元与空间嵌套的协调元之间的关系，从而设计出自适应非协调元的局部多水平算法，并通过Schwarz 理论框架证明了算法的一致收敛性。与传统的非协调元V循环多重网格相比，本文中的局部多水平算法只需一步光滑即可保证算法收敛。数值实验结果验证了理论分析的正确性和有效性。

**关键词：** 双调和方程，自适应网格，多水平算法，非协调元，Schwarz 理论