正交多项式、Toda格和尖峰孤子方程

李世豪

摘　要

可积系统与其它学科的交叉研究引发了越来越多学者的关注。近年来，关于可积系统与正交多项式的相关研究促进了两个学科的共同发展。一方面，从正交多项式出发，很多新的、有趣的可积系统被推导了出来，并且在正交多项式理论的帮助下，很多关于可积系统的好的性质被再度挖掘；另一方面，可积系统的深入研究使得新的正交性进入了人们的视线，这为正交多项式领域不断地注入新的血液。本文的研究内容即为基于Hirota双线性方法的关于可积系统与正交多项式之间的交叉研究。

根据正交性的不同，本文主要分成了四个部分：

1. 标准正交多项式与可积系统的关系。我们用标准的正交多项式作为例子，展示了如何从它推导出半离散的Toda方程，全离散的Toda方程，并借此给出了KP梯队的矩阵积分解。由于Camassa-Holm 方程与标准的正交多项式也有很好的关联，借助于正交多项式理论，找到了一个Camassa-Holm方程与Toda 格方程之间的关联；

2. 柯西双正交多项式与可积系统的关系。柯西双正交多项式是在寻求Degasperis-Procesi方程的尖峰孤子解的时候提出的。我们在这个部分则主要考虑了柯西双正交多项式对应的可积系统。利用合适的时间演化，提出了一个新型的Toda类型方程——C型Toda方程，并考虑了它与Degasperis-Procesi尖峰孤子方程之间的联系。再借助于Heine公式，我们展示了如何从C-Toda格的解构造CKP梯队的矩阵积分解；

3. 斜正交多项式与可积系统的关系。由于随机矩阵理论的兴起，斜正交多项式自20世纪末成为了人们关注的焦点。这个部分我们将重新审视这族多项式的正交性，给出一个斜正交多项式的行列式构造，并从中推导出Pfaff格。

4. 部分斜正交多项式与可积系统的关系。由于从斜正交多项式中我们很难去寻找到对应的局部的1+1维的可积系统，这迫使我们寻求新的具有Pfaffian表示的正交多项式。部分斜正交多项式就是在这个情况下提出的。我们给出了部分斜正交多项式的详细定义并考虑了与之对应的可积系统。更多地，我们发现它在计算数学不同领域之中扮演着重要角色。一个Pfaffian型的收敛加速算法与向量型Padé逼近和部分斜正交多项式的关系也在本文的最后被考虑。

关键词：可积系统，正交多项式，双线性方法，Pfaffian型收敛加速算法，向量型Padé逼近