不可压缩磁流体力学方程组的有限元方法

李凌霄

摘 要

磁流体力学在热核聚变堆液态金属包层设计、地核热对流数值模拟、铝电解以及磁流体发电机等工程领域具有重要应用。论文研究三维不可压缩磁流体力学(MHD) 方程组的有限元方法和迭代求解算法。由于不可压缩 Navier-Stokes (NS) 方程组是不可压缩 MHD 方程组的重要组成部分，本文首先对非稳态 NS 问题基于块预处理进行了并行有限元模拟，其中设计的迭代算法避免了传统的稀疏矩阵乘积。给出了 Re = 3200 时三维驱动方腔流的模拟结果，得到了与文献分析一致的涡结构。

三维稳态 MHD 方程组由于可用于快速获得稳态解而具有重要研究意义，但是高物理参数下的强耦合使得线性方程组的求解非常困难。论文基于近似块分解和谱等价的思想设计了一个新的块预条件子，与文献相比整体预处理效果更好。利用发展的预条件子提出了 Newton-Krylov 求解算法，大量数值算例验证了求解器在高物理参数下的稳健性。论文然后提出了基于磁向量势的有限元方法，该方法可以保持磁感应强度高斯定律或无散条件得到精确满足。对于速度使用节点元离散的格式，基于最小二乘交换子 (LSC) 预处理和修正的辅助空间预处理设计了可扩展的迭代求解器。基于磁向量势的 MHD 方程组，论文也提出了使用面单元离散速度场的格式，该格式可进一步保证离散速度场质量精确守恒。设计了基于时间方向外推的半隐格式，并证明了离散解的收敛性。此外论文还研究了无感应 MHD 方程组电荷守恒的有限元方法，设计了有效的增广拉格朗日类型的块预条件子，基于预处理的 GMRES 迭代法提出了全隐的有限元算法，给出了三维方腔流和管道流的模拟结果。针对动量方程中对流速度场已知的简化情形，在离散格式中添加 grad-div 稳定化项后，论文证明了空间半离散格式的误差估计，其中误差估计右端项的常数并不显式地依赖于流体雷诺数。

最后论文提出了鞍点问题统一的增广预处理框架，并将其用于前面针对稳态 MHD 方程组发展的块预条件子的进一步阐释上；此外基于磁场强度变量和磁向量势变量，论文提出了一个新的磁流体力学模型 (非守恒形式) ，该模型特点在于易于设计保证能量守恒、电荷守恒和高斯定律精确满足的有限元格式。基于动量方程的 grad-div 稳定化，所提出的离散格式可以有效地改善质量守恒，事实上它也保证了离散电流密度和离散磁感应强度散度精确为零。

关键词 ： 磁流体力学，块预处理，多物理场，零散度有限元格式，并行计算