离散空间分数阶扩散方程的快速迭代方法

路康亚

摘　要

空间分数阶扩散方程非常适合描述具有记忆和遗传特性的各种物质和过程，因此在物理、化学、生物、甚至金融等领域都有着广泛的应用。由于这类方程的解析解一般难以得到，人们设计了各种各样的用于离散空间分数阶扩散方程的数值格式，如有限差分和有限元。然而，无论采用哪一种离散格式，所对应的离散线性方程组的系数矩阵通常均是稠密且坏条件数的。因此，求解这类线性方程组的直接法将会消耗大量的内存和时间。鉴于这类离散线性方程组具有类似于Toeplitz矩阵的结构，人们设计了大量高效的求解该离散线性方程组的预处理Krylov子空间迭代方法。本文主要考虑求解由有限差分格式离散所得到的线性方程组的快速而可靠的迭代方法以及结构预处理Krylov子空间迭代方法。

首先，根据由空间分数阶扩散方程导出的离散线性方程组的对角与Toeplitz矩阵之和的结构，我们构造了一类对角与Toeplitz分裂迭代方法，并且建立了其无条件收敛性。我们特别给出了该迭代方法渐进收敛率的一个紧致上界，并且导出了极小化该上界的最优参数取值。依据该对角与Toeplitz分裂迭代方法，可以自然地构造出一类对角与循环分裂预处理子。该预处理子可以使得所对应的预处理矩阵的特征值聚集在1的附近，尤其是当离散步长h较小时。数值实验表明，对角与循环分裂预处理子可以显著地加速Krylov子空间迭代方法的收敛，并且对应的预处理Krylov子空间迭代方法具有与离散步长h无关的收敛性质。

其次，我们提出了三种新的用于求解由空间分数阶扩散方程离散所得到的系数矩阵为对角与Toeplitz矩阵之和的线性方程组的预处理子：对角与最优循环分裂预处理子，对角与反循环分裂预处理子，以及对角与最优反循环分裂预处理子。理论分析表明，这三种预处理子均可以使得预处理矩阵的特征值聚集在1的附近，尤其是当离散网格不断加密时。这些结果和对角与循环分裂预处理子的相应结果相一致。数值试验表明，这三类预处理子不仅可以很好地加快Krylov子空间迭代方法的收敛速度，而且还优于对角与循环分裂预处理子。

再次，对于二维和三维空间分数阶扩散方程，其有限差分离散可以得到一个系数矩阵为对角矩阵与分块Toeplitz且每块均为Toeplitz阵的矩阵之和的线性方程组。对于该离散线性方程组，我们构造了对角与分块循环且每块均为循环矩阵的分裂预处理子。理论分析和数值实验均表明，无论是对于二维还是三维离散线性方程组，该分裂预处理子对应的预处理矩阵的特征值都聚集在1的附近，并且可以显著地加快Krylov子空间迭代方法的收敛速度。

最后，对于一类一维变系数空间分数阶扩散方程的求解，我们建立了用于计算由有限差分格式所得到的离散线性方程组的近似解的带状M分裂迭代方法，在没有附加任何条件的情况下证明了该方法的渐进收敛性。进一步，我们构造了带状M分裂迭代方法的多步变形，证明了由该迭代方法所得到的离散线性方程组的计算解保真地收敛到原空间分数阶扩散方程的精确解。数值实验验证了该多步带状M分裂迭代方法的准确性和有效性。

关键词： Toeplitz矩阵，循环矩阵，带状M分裂迭代方法，预处理Krylov子空间迭代方法