求解三维椭圆型方程的通用子结构方法

胡少亮

摘要

椭圆型方程，比如正定的线弹性方程和麦克斯韦方程组，是科学工程计算中的一类基本方程。研究求解大规模强间断系数椭圆型方程的快速算法无疑非常重要。现有子结构区域分解方法的构造严重依赖于所考虑的模型，这一缺陷大大限制了子结构方法的实际应用。如何构造通用的子结构方法，是一个颇具挑战性的课题。本文旨在构造相对通用、易于实现并且便宜的子结构区域分解预条件子。本文主要成果如下：

构造子结构区域分解预条件子的两个关键要素是：（1）粗空间的构造；（2）局部界面求解器的设计。本文通过设计两类不同的局部界面求解器构造两个新型子结构预条件子，其中粗空间统一采用由粗网格诱导生成的自然有限元空间（从而不依赖于所考虑的椭圆型方程）。

在第一个预条件子中，提出了与顶点相关的辅助空间，进而构造了新的局部界面求解器。这种局部界面求解器的构造不依赖于具体的模型、易于实现且不增加计算量。同时本文还把这种方法推广到了不规则子区域的情形。

由于顶点相关辅助空间所对应的子区域可能不规则，对上述预条件子作收敛性分析会遇到新的困难。本文通过发展一些新的技巧，在适当假定下对线性弹性问题、$H(\mathrm{div})$空间上和$H(\mathbf{curl})$空间上的方程证明了第一个预条件子的有效性。

为了进一步减少界面求解器的计算量，在第二个预条件子中提出了一种粗化技术，进而构造了新颖的“逼近”局部界面求解器。这种粗化技术的基本思想是：在局部界面附近的子区域上构造辅助的非拟一致的网格，使得辅助网格在局部界面上与原始网格一致，而在远离局部界面的地方网格渐渐变粗。通过求解辅助网格上的有限元问题来实现这样的“逼近”界面求解器。这样构造的局部界面求解器会大大地降低计算量，而且这种求解器的构造依然不依赖于所考虑的模型。

本文将所设计的预条件子用于求解三类典型的椭圆型方程（线性弹性方程、麦克斯韦方程组和$H(\mathrm{div})$上的方程），并做了大量的数值实验。数值结果表明，针对这三类方程，本文设计的方法是一致高效的，即使对强间断系数情形也是如此。此外，数值结果表明本文所构造的预条件子比已有的子结构预条件子更加有效。

关键字:椭圆型方程，区域分解，子结构预条件子，顶点关联空间，粗化网格