优化问题的多层算法

陈诚

摘要

最优化是一门应用广泛的学科. 近年来, 随着人们需要求解的优化问题规模的爆炸式增长及高性能计算机的高速发展, 高效优化算法的研究也遇到了新的挑战与机遇. 本文针对求解由无穷维优化问题离散得到的大规模问题及相关应用, 设计了四类多层优化方法.

首先我们提出了一个求解由无穷维优化问题离散得到的无约束优化问题的自适应两层子空间方法. 算法交替执行细空间上的直接步和粗空间校正步. 对粗空间校正步, 我们引入一个由负梯度和当前迭代点张成的二维子空间来扩展粗网格空间, 并在这个新的子空间寻找下一步最优. 同时在一定条件下我们证明了算法的全局收敛性, 并得到了算法的收敛速度. 初步的数值结果表明我们的算法对求解大规模问题的有效性.

然后我们提出了求解复合优化问题的多层二阶方法. 通过引入邻近点迭代对应的不动点方程, 然后针对这类不动点方程分别设计了两个二阶方法求解——多层半光滑牛顿法和投影粗空间校正法. 考虑到牛顿类方法在远离最优解的时候收敛速度较慢, 我们参考全近似框架的思想设计了对非线性方程组的粗空间校正步, 并在校正后为满足约束而将校正结果投影回可行域内, 从而得到了投影粗空间校正法. 这一方法在一些问题的求解中, 在迭代初期可以有效加快收敛. 求解界约束问题的数值结果表明了我们算法的有效性.

之后我们提出了求解复合优化问题的多层一阶加速方法. 我们将粗空间校正引入邻近梯度方法和 Nesterov 加速算法, 针对复合类型的函数设计了对应的粗空间模型, 并使得算法在满足一定条件下可以交替在当前层迭代或执行粗空间校正步. 在一定的条件下, 我们证明了算法仍然可以保持一阶算法的收敛速度. 对于图像去噪去模糊问题的初步数值结果表明我们的多层方法收敛快于对应的邻近点方法和 Nesterov 加速算法.

最后我们提出了求解最优运输问题的多层方法. 我们根据问题的特殊结构, 改进了求解最优运输问题对偶形式的交替方向乘子法, 充分的节省了计算量与存储. 然后我们给出了这一问题对应的粗空间模型, 结合完全多重网格技巧设计了多层交替方向乘子法. 初步的数值结果表明我们改进的交替方向乘子法快于 MATLAB 线性规划求解器 “linprog”, 而提出的多层方法可以进一步加速我们的结果.

关键词: 多层优化算法, 子空间技巧, 半光滑牛顿法, 一阶加速算法, 最优运输