二维分数阶 Bloch-Torrey 方程的有限元方法

赵越

摘要

分数阶导数具有非局部的特性以至于非常适合描述一些具有遗传和记忆的现象. 迄今, 分数阶微积分已成功应用于高能物理、反常扩散、粘弹性材料、系统控制、流变学、水力学、生物医学工程、金融等诸多领域. 由于应用极其广泛, 分数阶微分方程已成为国际研究热点. 一般情况下分数阶微分方程的解析解含有特殊函数、复杂级数或者无显式表达式的 Green 函数, 这给实际计算带来极大不便. 因此, 寻找分数阶微分方程的数值解越来越受到人们的重视. 本文主要研究二维分数阶 Bloch-Torrey 方程的有限元方法,并给出了数值算例。

第一章主要对分数阶微积分的发展历史和研究现状进行简要介绍.

第二章介绍分数阶导数的各种定义、性质及它们之间的转换关系,并引入一维和二维分数阶导数空间.

第三章对二维时空分数阶 Bloch-Torrey 方程, 时间方向应用 $L2\text{-}1_{\sigma}$ 方法,空间方向应用 Galerkin 有限元方法, 并分析其稳定性与收敛性. 我们对二维求解区域进行三角剖分并选取线性分片多项式为基函数. 最后通过数值算例验证了我们的理论分析结果.