特征值下界与代数多重网格算法的研究

游春光

摘要

特征值问题在众多科学与工程应用中起着重要作用, 如房屋和桥梁结构的振动分析、飞行器和涡轮机的固有频率分析、量子化学中电子结构的计算等. 本文主要研究计算特征值显式下界的方法以及求解特征值问题的代数多重网格算法.

特征值的显式下界估计有着广泛的应用, 如界定插值算子相关的误差常数、分析非线性偏微分方程解的存在唯一性等. 本文首先分析已有的一个框架性结果, 并将其应用于二次 Lagrange 插值常数的显式估计. 随后针对应用框架的过程中所出现的局限性, 对框架作出推广, 使其应用范围更加广泛. 该框架所给出的下界依赖于投影算子的误差估计. 在将其应用于 Steklov 特征值问题时, 本文借助 Crouzeix-Raviart 插值算子对投影算子进行估计, 从而得到了 Steklov 特征值的显式下界. 最后, 结合 Lehmann-Goerisch 方法, 讨论了如何将下界的精度进一步提高. Steklov 特征值的显式下界可用于迹定理所出现常数的显式估计.

子空间方法是求解特征值问题的一类重要方法, 例如幂法 (反幂法) 可看作子空间迭代方法的一种, Arnoldi 方法属于子空间正交投影方法. 本文工作的第二部分将子空间正交投影方法和反幂法结合, 提出一种将当前近似特征向量并入子空间内的新的特征值问题求解算法, 并给出相应的能量误差估计. 以此为指导, 可以从新的角度解释几何多重网格方法求解特征值问题所表现出的最优性质, 也可以构造相应的代数多重网格算法. 一系列的数值实验表明, 代数多重网格算法在间断系数和各向异性特征值问题的快速求解方面具有很大的潜力.

关键词: 特征值问题, 有限元方法, 特征值上下界, 显式估计, 能量误差估计, 代数多重网格方法