非线性及非对称特征值问题的一些研究

谢满庭

摘　要

现代科学、技术、工程中的大量数学模型都是用偏微分方程以及偏微分方程特征值问题来描述的. 有限元方法是求解这些方程的一种重要而且有效的方法, 并且得到了广泛的应用.

Bose-Einstein 凝聚(BEC) 是一种重要的物质态. Gross-Pitaevskii 方程(GPE) 作为一类非线性特征值问题, 被广泛地应用于描述 BEC 的基态情形. 本文的第一项工作是在有限元方法的基础上, 基于求解线性特征值问题的多重校正算法和求解线性边值问题的多重网格算法, 设计了一种求解 GPE 多重网格法. 在这种方法中, 我们只需要用多重网格法求解 GPE 所对应的线性边值问题和在维数非常低的有限元空间中求解非线性特征值问题 GPE. 这种方法可以用最优的计算量求得具有最优收敛阶的 BEC 基态解, 因而可以有效地提高求解的精度和效率. 数值实验也验证了该方法的有效性.

特征值的上下界在物理学中有重要的意义. 本文的另外两项工作分别研究了非对称和非线性特征值问题中特征值的界. 对于非对称特征值问题, 我们主要研究了非亏损特征值的界. 基于能量互补方法, 在一般网格、一般有限元空间中, 分别得到了非对称特征值问题及其伴随问题特征函数的可计算误差估计. 再结合广义 Rayleigh 商展开, 就可以推导出非对称特征值的可计算且渐近准确的误差估计. 此外, 对于非线性特征值问题 GPE, 我们同样利用能量互补方法, 研究了其主特征函数的可计算误差估计, 并得到了 GPE 主特征值和 BEC 基态能量的渐近界. 一些数值实验也验证了这两部分的理论结果.

关键词： 有限元方法, 多重网格法, 多重校正法, Bose-Einstein 凝聚, Gross-Pitaevskii 方程, 非线性特征值问题, 非对称特征值问题, 可计算误差估计, 渐近界