特征值问题的区域分解方法

王威

摘要

随着并行计算的不断发展，区域分解算法已成为求解偏微分方程的重要工具. 高效地求解特征值问题一直以来都是计算数学最重要的课题之一. 本文的主要工作是利用两水平重叠型区域分解算法求解离散椭圆算子特征值问题，包括算法的收敛性分析，可扩展性分析以及相关的数值实验. 具体来说，可分为如下三个部分.

第一部分首先给出了 Sobolev 空间及有限元方法的一些基本知识，对特征值问题及其有限元离散做了简单介绍. 其次介绍了 Bogner-Fox-Schmit 元以及重叠型区域分解方法的基本理论框架.

第二部分针对二阶椭圆特征值问题，提出了求解离散特征值问题的两水平重叠型混合区域分解方法. 通过分解误差空间，在理论上分析了算法的收敛性，并证明了算法的最优性和可扩展性. 与文献中其它算法不同，我们的算法并不需要假设两层网格的尺寸之间满足任何条件. 数值结果验证了算法的理论结果.

第三部分讨论了四阶椭圆特征值问题. 为了求解高阶问题，基于 Jacobi-Davidson 方法设计了两水平加性区域分解方法. 以重调和算子为例，通过 Schwarz 框架，在H^3-正则性假设下，理论证明了算法的收敛性和最优性. 通过合理地选取粗空间，证明了算法具有很好的可扩展性. 数值实验验证了理论分析的正确性，也说明了算法的有效性.

关键词：两水平重叠型区域分解算法，特征值问题，有限元方法，Jacobi-Davidson 方法