几类随机偏微分方程的适定性分析和 Galerkin 逼近强收敛率估计

刘智慧

摘要

本文研究随机 Poisson 方程、随机热传导方程、随机波动方程和随机非线性 Schrödinger 方程的适定性、正则性和 Galerkin 逼近的强收敛率. 对于协方差算子与 Laplace 算子满足交互条件的 Gauss 噪声或 Hurst 参数 $\mathbf{H} \leq \frac{1}{2}$ 的分数阶噪声驱动的随机 Poisson 方程, 利用谱投影截断或 Wong–Zakai 逼近噪声的技巧证明了解的存在唯一性和 Sobolev 正则性, 并给出了 Galerkin 逼近的强误差估计的一般理论. 对于 Hurst 参数 $\mathbf{H} \leq \frac{1}{2}$ 的分数阶噪声驱动的随机热传导方程和随机波动方程, 证明了解的存在唯一性和最优 Sobolev 正则性, 并利用 Wong–Zakai 逼近来正则化分数阶噪声, 给出了 Galerkin 逼近强误差估计的一般理论. 对于 $\mathbf{Q}$-Wiener 过程驱动的随机非线性 Schrödinger 方程, 应用 (局部) 解高阶导数的先验估计证明了聚焦和散焦情形下方程的 $\mathbb{H}^2$ 适定性, 并且通过证明解的某种指数可积性得到了谱 Galerkin 逼近的最优强收敛率.

关键词 随机 Poisson 方程, 随机热传导方程, 随机波动方程, 随机非线性 Schrödinger 方程, 适定性, Wong–Zakai 逼近, Galerkin 有限元逼近, 谱 Galerkin 逼近, 强收敛率.