高阶浸没小波间断伽辽金方法

李可

摘要

不规则区域边值问题和界面问题在科学及工程计算中具有重要的实际意义。实际问题中边界和界面的复杂几何结构使传统的数值计算方法在网格构造、高阶格式的设计和数学理论分析上面临巨大挑战。针对这类问题，本文提出了一种全新的数值计算方法——高阶浸没小波间断伽辽金(IWDG)方法。在该方法中，我们首先用小波基稀疏逼近求解区域的特征函数，然后利用内罚间断伽辽金（DG）方法求解这个近似问题。该方法使用非贴体网格，可以生成高阶离散格式，而且先验估计具有最优收敛阶。IWDG 方法的主要创新体现在如下两个方面：

1. 为了刻画边界或界面的复杂几何结构，我们从代数的角度出发，利用小波基稀疏逼近求解区域的特征函数，从而将求解区域的复杂几何特征转化为易于数值计算的代数性质。小波不仅基函数简单，具有快速算法，而且表示具有稀疏性，
因此用小波基刻画基函数不仅可以用统一的方式处理几何结构任意复杂的界面或边界，而且逼近误差可控，便于数值计算。

基于这个思想，我们对特征函数提出了两种逼近方法。原始的逼近方法是直接利用小波基函数稀疏逼近求解区域的特征函数；改进的方法是首先利用简单多边形逼近不规则区域，然后用小波基稀疏逼近未被多边形刻画的部分。本文第一部分以椭圆边值问题为例，基于上述原始的逼近方法和网格粗化策略，提出了原始的 IWDG 方法。第二部分在椭圆界面问题的背景下，基于上述改进的逼近方法和粗化策略，提出了改进的 IWDG 方法。事实上，原始的和改进的 IWDG 方法对边值和界面问题都适用，且误差估计都具有最优收敛阶。理论和数值算例都表明，改进的 IWDG 方法所用的小波基的个数远远少于原始的 IWDG 方法。

2. 为了使离散问题的稳定性不依赖于网格和界面的相交方式，我们提出了网格粗化与局部加密相结合的网格生成策略，改进了 Johansson 和 Larson 提出的网格粗化方法，去掉了网格粗化中初始网格需要充分刻画边界或界面的假设。为了避免局部加密影响相邻单元，我们允许网格中存在任意阶悬点。本文第三部分以椭圆界面问题为例，基于存在任意阶悬点的非匹配网格，提出了允许任意阶悬点的 IWDG 方法。为了消除任意阶悬点的影响，我们对 DG 格式中数值通量选择了特殊的加权平均，进而推导出了最优先验误差估计。

关键词： 稀疏小波逼近，非匹配网格 ，任意阶悬点，高阶浸没间断伽辽金方法，椭圆问题