随机性全局优化方法研究

康冬

摘要

最优化问题在科学与工程领域越来越广泛出现, 其中的很多问题往往需要求全局最优解. 对于凸规划来说, 局部最优解就是全局最优解, 可以使用局部优化算法求解. 但当问题非凸时, 求全局最优解一般来说是NP难的. 因此针对这类问题, 如何在有限时间内, 求得较好的近似全局最优解, 就是本文研究的主要动机. 全局优化方法主要可以分为确定性全局优化方法和随机性全局优化方法, 本文主要研究的是随机性全局优化方法.

首先研究黑箱问题. 对于黑箱问题, 目标函数没有显式表达式, 导数信息不可用, 并且函数值计算代价昂贵. 针对 Regis 和 Shoemaker 提出的随机径向基函数算法框架, 我们分析了该算法的候选点生成方式存在不足. 据此, 我们设计了划分区域撒点的策略. 该策略既充分利用了所有已求值点的信息, 又兼顾了局部函数值的大小和对全局空间的探测二者的平衡. 进而根据新的撒点方法和重启动策略, 提出了四种改进的随机径向基函数算法. 初步数值结果表明新的策略的确提高了算法的有效性.

其次考虑实对称张量极大极小 Z-特征值问题. 该问题等价于一个球面上的齐次多项式求解问题. 我们提出了多初始点序列子空间投影方法, 这是一个两阶段的随机性全局优化方法. 使用等面积划分技术在球面上产生较为分散的初始点; 在每次迭代的全局探测阶段, 按照依球面均匀分布的撒点方式在球面上不断增加新的初始点; 在每次迭代的局部提升阶段, 使用序列子空间投影方法作用在新增初始点上. 证明了该算法在概率意义下可以收敛到问题的全局最优解, 初步的数值实验也表明该算法在求解实对称张量极特征值问题上的有效性.

最后考虑带有标准单纯形约束的非凸稀疏全局优化问题. 理论上, 我们首先针对带 L_p 正则项$(0 < p < 1)$的稀疏优化问题, 证明了在标准单纯形约束下的下界理论, 并给出了为保证全局最优解的稀疏度, 参数 λ 需要满足的充分性条件. 算法方面, 我们基于进化算法的思想, 设计了一种在标准单纯形上等分构造分散初始点的方式, 并提出了定向变异进化算法, 求解带有标准单纯形约束的 $L_2 - L_p$ $(0 < p < 1)$ 极小化问题. 初步数值结果表明, 对于小规模问题, 对比于局部方法 ALM, 我们所提出的方法可以在函数值和稀疏度方面得到更优的结果.

关键词:随机性全局优化方法, 黑箱问题, 张量特征值问题, 约束稀疏优化, 多初始点策略