健壮的一维黎曼解法器和真正多维黎曼解法器的研究

胡立军

摘要

传统上求解可压缩欧拉方程的数值方法基本上可以分成两类：通量差分裂方法(FDS) 和通量分裂方法(FVS)。其中通量差分裂方法是基于对两个相邻状态之间的局部黎曼问题求精确解或者近似解。一些著名的近似黎曼解法器包括 Roe，HLL 和 HLLC 等等。其中，两波近似的 HLL 近似黎曼解法器在计算时非常高效和健壮，但是不能分辨接触间断大大地限制了它的使用。Roe 格式和 HLLC 格式具有简单高效并且能够分辨接触间断等优点，在计算流体力学中被广泛使用。但是它们在计算某些多维问题时，会导致一些非物理现象的出现，包括膨胀激波，负内能，慢行激波，carbuncle 现象，双马赫杆和奇偶失联等现象，由于这些非物理现象通常出现在强激波附近，因此统称为激波不稳定现象。研究和治愈格式的激波不稳定性成为了计算流体力学的一个重要问题。本文利用线性稳定性分析方法和矩阵分析法分析了欧拉方程的 HLLC 格式产生激波不稳定现象的原因，并且构造了一种新的混合方法来治愈 HLLC 格式的激波不稳定性。应用同样的思路，可以构造类似的混合方法来治愈其它数值格式的激波不稳定性。

在矢通量分裂方法中，传统的 Steger-Warming 格式和 Van Leer 格式可以捕捉与非线性波相对应的间断，却不能精确地捕捉与线性波所对应的间断，因此在计算接触间断和剪切波时会产生过大的耗散。为了结合通量差分裂方法和矢通量分裂方法的优点，Liou 和 Steffen 提出了一种能够分辨接触波的矢通量分裂格式(AUSM 格式, Advection Upstream Splitting Method)，并将其发展成不同版本的 AUSM 格式。类似的矢通量分裂格式还包括 Zha-Bilgen 格式以及最近出现的 TV 格式等。然而这些能够分辨接触间断的矢通量分裂格式在计算多维问题时，也会不同程度地出现数值激波不稳定现象。本文提出了一种健壮的 TV 矢通量分裂格式(命名为 R-TV 格式)。与原始的 TV 格式不同的是，R-TV 格式采用一种类似于 HLL 格式的数值方法来计算压力通量，使得格式不仅保留了原始 TV 格式能够分辨接触间断和消除慢行激波波后振荡等优点，而且在计算二维问题时还不会出现激波不稳定现象。

传统的黎曼解法器在计算多维问题的数值通量时，把网格界面的间断分解成一维的波系结构，这样处理所带来的问题是：一维通量仅仅考虑沿着网格界面法向传播的信息，而忽略了沿着网格界面横向传播的信息，这会导致格式分辨率和稳定性的降低，并且在计算多维问题时允许使用的 CFL 数也会大大减小。因此，构造真正多维的黎曼解法器在计算流体力学中仍有实际应用，但需要克服数学复杂性和计算代价大的问题。最近，Balsara 提出了一种形式简单的真正多维 HLLE 黎曼解法器，基本思路是通过求解网格界面角点处的多维黎曼问题来实现格式真正多维的特性。本文将 Balsara 的思路进行推广，构造了两种不同版本的真正多维的 TV 格式(GM-TV-HLL 格式和 GM-TV 格式)和真正多维的 AUSM 格式(GM-AUSM-HLL 格式和 GM-AUSM 格式)。数值实验验证了本文构造的几种真正多维黎曼解法器在计算中可以使用更大的 CFL 数，而且也比传统的 TV 格式和 AUSM 格式具有更好的健壮性，在计算二维问题时不会出现激波不稳定现象。通过计算时间，精度以及健壮性的比较，真正多维的 TV 格式在计算中表现最好。

关键词： 欧拉方程，激波不稳定性，HLLC-FORCE 混合格式，TV 格式，健壮的 TV 格式，真正多维黎曼解法器，捕捉接触间断，SDWLS 梯度重构