相位恢复模型及算法研究

高冰

摘要

相位恢复问题主要研究通过无相位的观测来恢复信号或者图像. 本文主要针对相位恢复问题中的恢复模型及求解算法这两方面进行了一些研究. 对于恢复模型, 我们主要考虑恢复稀疏信号的 ℓ_1-最小化模型和恢复框架下稀疏信号的 ℓ_1-分析模型; 而对于求解算法, 我们主要考虑求解稀疏相位恢复的不动点算法和求解相位恢复的 Gauss-Newton 算法.

首先, 针对稀疏相位恢复, 我们证明了在有误差的观测下, 若观测矩阵满足强约束等距性质(S-RIP), 则恢复稀疏信号的 ℓ_1-最小化模型是一个稳定的恢复模型. 利用该性质可以证明, 当观测矩阵是高斯随机矩阵时, 稳定恢复一个 k 稀疏信号仅需要 $\mathcal{O}\big(k\log(en/k)\big)$ 次观测, 这和压缩感知中稳定恢复一个 k 稀疏信号所需的观测量级是同等的. 进一步, 利用压缩感知中已有的结论和工具, 我们对相位恢复问题的零空间性质(NSP)和个例最优性进行了分析, 建立了压缩感知问题和相位恢复问题之间的联系.

其次, 在现实生活中有很多信号或者图像本身并不稀疏, 但能在某一类框架/字典下保持稀疏, 我们称这样的信号为框架/字典下稀疏信号. 针对框架下稀疏信号的相位恢复问题, 我们对 ℓ_1-分析模型进行了研究. 在无误差的情况下, 我们对观测矩阵的零空间进行了分析, 并给出了精确恢复的充分必要条件. 在有误差的情况下, 通过引入适用于 D 的强约束等距性质(S-DRIP), 我们证明了若观测矩阵满足 S-DRIP, 则 ℓ_1-分析模型是一个可稳定恢复框架D下稀疏信号的模型. 同时在证明过程中, 我们也得到了压缩感知中稳定恢复框架下稀疏信号所需满足的约束等距性质(RIP)中最优的约束等距常数(RIC).

再次, 我们研究了一种称之为不动点算法的迭代方法来求解稀疏信号的相位恢复问题. 在该方法中, 我们首先需要执行初始化过程, 即选取一个接近精确解的稀疏初值; 然后再利用 proximal 算子进行迭代求解. 对于初始化过程, 可以证明当观测量级为 $\mathcal{O}\big(k^2\log(m)\big)$ 时, 我们便可得到理想的初值, 其中 k 是信号的稀疏度, 而对于不动点迭代过程, 我们介绍了其局部收敛性的证明.

然后, 由于相位恢复问题是非凸的, 因此目前很多迭代算法都会陷入一个局部稳定点, 虽然这些迭代算法有较好的数值表现, 但我们难以在理论上证明这些算法收敛到精确解. 要保证迭代算法收敛到精确解, 目前常用的方法是选择一个好的初始值后再从此初始值开始迭代, 如 WF 方法和 TAF 方法. 这些算法被证明是线性收敛的. 在本文中, 我们提出一种新的称为 Gauss-Newton 算法的迭代方法. 对于实空间中的信号, 我们证明了重采样的 Gauss-Newton 算法是二阶收敛的. 在该方法中, 我们同样需要执行初始化过程, 即选取一个接近精确解的初值; 然后将相位恢复问题近似为非线性最小二乘问题后通过 Gauss-Newton 方法进行求解. 对于初始化过程, 我们给出一种新的初值选取方法, 该方法仅需 $\mathcal{O}(n)$ 次观测便可达到理想精度. 从数值试验可以看出该方法在收敛速度, 观测量和成功率等方面都具有极大的优越性.

最后, 我们介绍仿射相位恢复问题, 该问题是通过无相位的仿射观测来恢复信号. 仿射相位恢复问题是传统相位恢复问题的一个延伸. 针对仿射相位恢复问题, 本文建立了仿射相位恢复的一般框架, 给出了若干仿射相位可恢复的充分必

要条件, 并分析了仿射相位可恢复的最小观测次数. 对于一般位置上的观测, 仿射相位可恢复的充分条件是$m \geq 2n$ (实数域)或者$m \geq 4n-1$ (复数域). 对于稀疏信号, 选取一般位置上$2k+1$ (实数域)个或者$4k+1$ (复数域)个观测即可恢复一个k稀疏信号.

关键词： 相位恢复, ℓ_1-最小化模型, 迭代算法, 仿射相位恢复