# 半无限优化问题的可行方法

王树雄

## 摘 要

半无限优化问题是一类决策变量有限，约束个数无穷的优化问题. 这类优化模型在经济领域和工业领域有着广泛的应用. 求解半无限优化问题的主要困难来自于无穷多个约束. 检查一个给定点是否为原问题的可行点等价于求解一个全局优化问题. 本文将给出一系列求解半无限优化问题的可行方法.

首先，对于参数集合为区间的情形，我们给出求解这类问题的一个数值方法. 该方法可以保证每个迭代点是原问题的一个可行点. 我们的基本思想是构造一个下层问题的凹松弛，精确给出松弛问题的解并利用这个性质构造一个逼近问题. 逼近问题的约束个数是有限的，通过求解逼近问题我们可以得到原问题的一个近似解. 凹松弛是通过构造下层问题目标函数的上界凸函数得到的.在一定的条件下，我们可以证明逼近问题最优解的任何极限点都是原问题的一个最优解. 为了求解半无限优化问题，我们设计了一个自适应划分算法. 我们证明了，对于任意给定的精度，我们可以在有限迭代步之内得到原问题的一个 Karush－Kuhn－Tucker 点. 数值实验表明我们的算法比已有的自适应凸化算法更有效率.

其次，对于参数集合为任意紧集的情形，我们推广了上述方法. 我们首先定义参数集合的既约划分，然后基于既约划分构造下层问题的凹松弛. 在此基础上，我们构造了一个逼近问题，该问题的约束是由有限个不等式约束组成的.我们的方法可以保证逼近问题的所有可行点都是原问题的可行点. 为了求解一般情形下的半无限优化问题，我们设计了一个自适应划分算法. 在算法的每步迭代中，我们首先给出既约划分，然后通过求解逼近问题得到该问题的一个近似 Karush－Kuhn－Tucker 点. 如果该近似解是原问题的一个满足给定精度的 Karush－Kuhn－Tucker 点，算法终止. 否则，对当前的既约划分进行细分. 通过三等分的细分策略，我们可以证明算法产生的逼近区域是单调递增的. 对于任意给定的精度，该算法在有限步迭代之内终止.

对于线性半无限优化问题，即在半无限优化问题中，目标函数和约束函数关于决策变量都是线性的，我们给出了一个求解这类问题的数值方法. 该方法可以保证每个迭代点都是原问题的一个可行点. 我们的方法通过两个阶段来实现：在第一阶段，对半无限约束进行限制; 在第二阶段，对系数函数进行近似. 基于上述两个阶段，我们构造了一个标准的线性规划问题作为原问题的一个逼近问题. 在一定的条件下，逼近问题的最优解收敛到原问题的一个最优解. 此外，我们设计了一个算法来求解线性半无限优化问题. 数值结果表明我们的算法是非常有效的.

**关键词：** 半无限优化，线性半无限优化，可行方法，凹松弛，自适应划分算法