求解大波数 Helmholtz 方程的新型多层方法

李璇

摘要

Helmholtz 方程是模拟声波散射问题的基本模型, 在科学计算中有着非常重要的应用. Helmholtz 方程是强不定的, 当波数比较大时, 方程的解析解是高度振荡的, 这就给求解带来了巨大的困难. 因而, 如何高效地求解大波数 Helmholtz 方程, 是当今科学工程计算领域中的一个重要研究课题.

本文主要研究求解大波数 Helmholtz 方程的新型多层方法. 主要工作包括以下几个方面：

(1) 针对二维大波数 Helmholtz 方程, 提出了一种新型多层方法. 首先, 本文采用平面波最小二乘方法和平面波间断有限元方法对 Helmholtz 方程进行离散. 其次, 对平面波离散空间建立多层重叠空间分解. 基于建立的多层空间分解, 对 Helmholtz 平面波离散系统, 构造了一系列新的多层预条件子, 实现方程的快速求解.

(2) 针对三维大波数 Helmholtz 方程, 提出了一种(不同于二维情形)新型多层方法. 本文基于重叠区域分解的思想, 构造了求解 Helmholtz 平面波离散系统的多层求解器.

(3) 证明了所提出的方法具有渐近最优的计算复杂性, 说明了所提出的方法与传统多重网格方法存在本质区别.

(4) 在研究过程中, 进行了大量的数值试验, 数值结果表明所提出的新型多层方法对于大波数 Helmholtz 方程具有相对稳定的收敛性, 即随着波数的增加和网格尺寸的减小, 迭代次数增加得非常缓慢.

关键词：Helmholtz 方程, 大波数, 平面波方法, 多层重叠区域分解, 光滑子, 计算复杂度