基于间断Petrov-Galerkin方法的区域分解法

李翔

摘　　要

在现代科学与工程计算中, 区域分解(DD)算法已成为求解偏微分方程的重要工具. 基于间断Petrov-Galerkin(DPG)方法, 本文分别对Poisson方程和Helmholtz方程设计了区域分解型求解器. 本文将从算法设计、理论分析和数值实验等方面进行研究, 具体可以分为如下三个部分.

第一部分首先给出了Sobolev空间以及向量有限元函数等一些预备知识, 并对DPG方法做一个简要介绍. 其次介绍了重叠型区域分解方法的基本框架以及求解线性方程组的预优共轭梯度法.

第二部分针对Poisson方程, 给出了基于DPG方法的两层重叠型区域分解算法的代数系统和对应的预条件子, 并且借助抽象Schwarz 框架, 给出了预条件系统的条件数估计, 证明了算法的最优性和可扩展性. 在理论分析中, 由于DPG方法中所有的边界条件均为本质边界条件, 本文为Poisson方程的三种不同的边界条件分别构造了不同类型的稳定分解. 数值结果验证了该预条件子的有效性.

第三部分针对大波数Helmholtz方程, 给出了基于DPG方法的单层重叠型区域分解算法的代数系统和对应的预条件子. 对于大波数Helmholtz问题, 本文的算法也可以做到完全并行. 对一维模型问题, 借助抽象Schwarz框架, 本文证明了算法的最优性和可扩展性, 特别地, 证明了预条件系统的条件数与Helmholtz方程的波数无关. 进一步, 对于二维问题, 本文也给出了预条件系统的一个条件数估计. 数值实验验证了理论分析的正确性, 也说明了该算法的有效性.

关键词： 间断Petrov-Galerkin方法, 区域分解预条件子, Poisson方程, 大波数, Helmholtz方程