等离子体动理学中的高阶矩方法

寇振中

摘　　要

等离子体是包含足够数量带电粒子、中性粒子，表现出集体行为的多粒子体系。等离子体动理学是介于单粒子轨道理论和流体动力学之间用统计物理学方法来描述等离子体运动状态的学科，在受控热核聚变、天体和空间物理、微电子和半导体等领域有广泛的应用。Vlasov 方程组是描述在自洽或者外加电磁场影响下，无碰撞等离子体中带电粒子分布随着时间演化的最经典的动理学模型。然而，由于该方程组维度高、演化过程中出现精细结构（“拉丝”现象）等方面的影响，其数值求解极具挑战性。

近年来，李若教授等人在 Grad 矩方法的基础上，设计出一套具有统一形式的数值格式，提出任意阶矩方程组均可保证全局双曲性的矩封闭方案，得到了一系列连接气体动力学和气体动理学的可计算模型。该方法为气体动理学建模和计算，特别是 Boltzmann 方程的数值模拟开辟了一条全新的途径。Vlasov 方程可以看成微观粒子为带电粒子，相互作用由长程库仑力的 Boltzmann 方程。基于此，本文主要研究矩方法在等离子体动理学方程数值求解方面的应用，并针对等离子体动理学方程的特点，对矩方法做相应的改进，以进一步提高计算效率，使得矩方法在等离子体动理学方程数值计算中发挥更大的作用。本文的研究工作主要分两部分：

第一部分沿着利用投影算子进行模型降阶的思路，进一步研究全局双曲矩方法在 Vlasov 方程数值求解方面的推广。首先在矩系统框架下，利用针对 Boltzmann 方程的全局双曲正则化方案，得到 Vlasov-Maxwell(VM) 方程的高阶矩模型，其局部适定性也同时获得。因展开式在微观速度方向依赖宏观变量，所得模型是以物理参数为指示子的自适应可计算模型，可以直观展现电磁场力项对宏观物理量的作用，保持原来方程中重要的守恒量。在用一个具有精确平衡解的例子部分证明所得矩系统的合理性之后，讨论所得模型与磁流体力学和双流体模型之间的联系，表明 VM 方程的全局双曲矩模型可以看成磁流体力学方程组的推广模型。最后，简要介绍求解全局双曲矩方程组的数值格式，通过数值实验说明全局双曲矩模型在提高计算效率的同时，能够准确描述等离子体回声波等磁流体力学模型无法描述的波动现象。

第二部分主要针对矩方法计算远离热力学平衡分布问题时出现的数值困

难，给出推广矩方法的两种尝试。一是改变分布函数的谱展开基函数，在“双峰”型函数附近展开分布函数来提高逼近效率。在此谱展开下得到的矩方程组之后，利用最新的全局双曲矩框架理论得到双曲性，从而保证矩方程组有局部适定性。把谱展开基函数中引用的参数直接选取为常数简化方程组，对以“双峰”型函数为初值的平流问题进行数值模拟，表明该简化方程组对于此类问题模拟具有明显的优越性。二是基于傅里叶变换能将分布函数速度空间中高频扰动“抹去”的观察，提出针对傅里叶变换后的 Vlasov-Poisson(VP) 方程的矩方法，考虑在变换后的速度空间上分段逼近，通过定义基函数间特殊的运算关系得到矩方程组的双曲性。

关键词： Vlasov 方程，矩方法，Landau 阻尼，等离子体回声波，“双流”不稳定性