可积系统与正交多项式的交叉研究及其应用

陈晓敏

摘　　要

随着可积系统理论的发展, 可积系统与其他理论之间的联系越来越引起注意. 近年来, 学者们发现可积系统与正交多项式、收敛加速算法之间存在着紧密的联系, 对这些交叉领域的研究有助于从全新的角度来审视各个学科进而促进学科的发展. 本文的研究内容即为可积系统与正交多项式及加速收敛算法两方面的交叉研究, 采用的研究方法主要是 Hirota 双线性方法及行列式技巧.

首先, 在可积系统与正交多项式的交叉研究方面, 在第 二、 三、 四章中我们分别研究了几个与正交多项式相关的半离散、全离散及连续的可积系统. 其中, 对与正交多项式相关的半离散的可积系统, 我们重点研究了 Schur 流、相对论 Toda 链以及 Lotka-Volterra 方程, 通过在它们各自的矩演化关系中引入一个卷积项或非等谱变形, 分别导出了推广的 Schur 流方程、推广的混合形式的相对论 Toda 链以及非等谱 Lotka-Volterra 方程. 此外, 对与正交多项式相关的全离散的可积系统, 我们考察了时间离散的 Lotka-Volterra 方程并得到了一个推广的向后差分类型的时间离散的 Lotka Volterra 方程, 其中离散化后的矩满足一个带有卷积项的差分方程. 另外, 对与正交多项式相关的连续的可积系统, 我们对 Camassa-Holm 方程进行了探讨, 从一个推广的矩演化方程及 N-尖峰孤子解的行列式表达式出发, 我们得到了一个推广的非等谱的 Camassa-Holm 方程并给出它的一个非等谱 Lax 对.

其次, 在可积系统与加速收敛算法的交叉研究方面, 第 五 章里我们重点探讨了 confluent ε- 算法及 confluent ρ-算法, 它们都具有行列式型的解. 通过在行列式元素的演化关系中引入一个卷积项, 我们得到了一个推广的 confluent ε- 算法及一个推广的 confluent ρ-算法. 这两个推广的算法中都包含有一个任意函数, 数值结果表明, 若该函数选取的合适, 则较之于 Wynn 提出的 confluent ε-算法及 confluent ρ-算法, 我们得到的两个推广的算法在一定程度上可以改善收敛速度.

最后, 本文在第 六 章里给出了两个应用. 一是在组合计数方面, 利用本文提出的带有卷积项的矩演化方程导出了几个新的组合数并用格路给出了相应的组合解释. 二是在生物上, 将我们得到的推广的非等谱 Lotka-Volterra 方程作为一个食物链模型, 采用数值方法定性分析了物种的行为.

关键词： 可积系统, 正交多项式, 收敛加速算法, 双线性方法, 行列式恒等式