对称张量特征值的计算—算法设计与应用

崔春风

摘要

张量是高阶数组, 在二阶情形退化为矩阵, 在一阶情形退化为向量. 众所周知, 矩阵的特征值在很多实际问题中有重要的应用. 特征值也是张量的基本性质之一, 在实际应用问题和研究张量的其他属性等方面都有重要的意义, 自 2005 年以来得到了国内外很多学者的关注. 对称张量的特征值可以由多项式优化问题来求解, 并且该类问题有很特殊的结构. 本文主要研究对称张量特征值的求解及其在超图谱理论中的应用.

在第二章, 我们提出了求解对称张量所有实特征值的算法. 众所周知, 张量的最大或者最小特征值可以通过求解多项式优化问题得到, 而其他的特征值却不能. 我们的算法从最大到最小依次求解张量的所有实特征值, 每步求解一个多项式优化问题的全局最优解, 这利用了多项式优化问题的 Jacobi 半正定规划松弛. 我们证明了该算法可以收敛到所有的实特征值, 数值实验说明了该算法的有效性.

在第三章, 我们提出了求解对称张量的最大最小 Z-特征值的序列子空间投影算法. 其主要思想是在当前节点构造一个二维子空间, 然后在该二维子空间内构造子问题. 该子问题等价于求解二维张量的最大最小 Z-特征值, 可以通过求解多项式的根直接得到. 我们进一步证明了该算法的全局收敛性和局部线性收敛速度. 初步的数值实验表明我们的算法是有效的, 且对一些测试问题, 迭代步数和求解时间远小于转移幂方法.

在第四章, 我们提出了求解对称张量最大最小 Z-特征值和偶数阶张量 H-特征值的可行信赖域算法. 该算法用到了张量的二阶信息, 因此进一步提高了算法的收敛速度. 算法的基本思想是, 在当前点通过信赖域子问题计算试探步 d_k, 然后将 $x_k + d_k$ 在可行域的投影作为下一步迭代的候选点, 而不是直接利用 $x_k + d_k$. 我们证明了可行信赖算法计算对称张量 Z-特征值的全局收敛性和局部二阶收敛速度. 初步的数值实验表明我们的算法是非常有效的, 迭代步数和求解时间在序列子空间投影算法的基础上进一步降低, 且优于很多已有的算法.

最后, 我们将求解对称张量特征值的优化算法应用到超图谱理论. 随着大数据的发展, 图论已经不能满足科技发展的需求, 应运而成的是超图理论. 超图谱理论是图谱理论的推广, 它的发展基于超图对应的邻接张量, Laplace 张量和无符号 Laplace 张量的特征值. 本文将利用上文的算法计算齐次超图 Laplace 张量的最大 H-特征值和 Z-特征值.

关键字: 对称张量特征值; 多项式优化; 半正定规划松弛; 序列子空间投影; 可行信赖域; 超图谱理论