孤子方程的可积离散化及其应用

张英楠

摘要

寻找孤子方程的可积离散化方程是孤子理论研究中的一个重要方向, 也获得了大量的关注. 本文的研究内容即为孤子方程的可积离散化.

我们从孤子方程和其 B\"acklund 变换的相容性出发, 给出了一种新的可积离散化方法. 从双线性方程出发, Hirota 先生的可积离散化思想是首先差分化双线性算子, 进而验证可积性. 而我们的主要思路是对由孤子方程及其 B\"acklund 变换组成的扩展相容性系统引进离散变量, 进而通过收敛性确定相关参数的值, 即可给出原孤子方程的可积近似. 使用相容性方法, 我们给出了一些孤子方程的可积离散化, 并研究了相关离散方程的可积性质. 相关内容包括 Korteweg-de-Vries (KdV) 方程, Boussinesq 方程, Sawada-Koterra 方程, Ito 方程, Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程的空间半离散, KdV 方程, 非线性 Schr\"{o}dinger(NLS)方程的时间半离散, 以及 KdV 方程的全离散.

可积离散化的一个直接应用, 也是我们的最初动机, 即为设计求解孤子方程的可积数值格式. 我们从 KdV 方程和 NLS 方程的时间半离散近似出发, 采用高精度的拟谱方法离散空间变量, 构造了数值求解的近可积算法. 采用我们的近可积算法数值求解方程时, 虽然拟谱方法破坏掉了方程的可积性质, 相对于其他的时间离散方法, 近可积算法在守恒量的保持上依然有着很大的优势.

从可积方程族的统一双线性形出发, 通过方程族的可积离散化, 我们给出了递推算子的可积离散化概念. 用递推算子来表示可积方程族的一个显著特点是可以将可积方程族写成统一的形式. 从这样统一的形式出发, 经相关变量变换, 可以推出统一双线性表示; 同样的, 从可积的双线性方程族出发, 经相关变量变换, 可以推出方程族统一的非线性表示以及相应的离散递推算子.

关键词： 可积系统, 可积离散化, 双线性方法, B\"acklund 变换, 数值应用, 递推算子