随机 Maxwell 方程的随机多辛数值算法

张利英

摘要

在求解确定的哈密尔顿常微分方程和哈密尔顿偏微分方程时，保结构算法较传统的数值方法在长时间计算以及保持系统的结构、物理性质等方面更具优越性. 继 Milstein 等人将此算法推广到随机哈密尔顿常微分方程，文[105]首次提出了随机哈密尔顿偏微分方程、随机多辛守恒律和随机多辛数值算法. 本文研究了一类重要的随机哈密尔顿偏微分方程---Wiener 过程驱动的随机 Maxwell 方程，主要工作包括：

1. 确定 Maxwell 方程具有许多重要的物理性质，如能量满足 Poynting 定理、电荷和磁荷满足守恒律以及方程具有对偶不变性等.对于随机 Maxwell 方程，我们得到系统的能量满足耗散规律；电荷和磁荷在统计意义下满足守恒律；方程仍具有对偶不变性等. 对于源电流和源电荷仅由 Wiener 过程刻画的简化模型，证明了平均能量呈线性增长，并给出了其增长率；电场和磁场的平均散度具有守恒性.

2. 基于随机变分原理，针对加性 Wiener 过程驱动的随机 Maxwell 方程，我们给出了其随机哈密尔顿偏微分方程的形式，构造了一个保持随机多辛守恒律的数值算法，并给出该算法对应离散能量耗散规律的表达式. 数值实验表明该算法对于不同尺度噪声均能严格保持离散能量耗散规律.

3. 从随机 Maxwell 方程本身出发给出它的另一种随机哈密尔顿偏微分方程形式，构造了三个随机多辛数值算法，证明了它们离散的平均散度具有守恒性和离散的平均能量具有耗散性，并给出了离散平均能量线性增长率的估计式. 数值实验验证了离散平均散度的守恒性和平均能量的线性增长性.

关键词：随机 Maxwell 方程，随机哈密尔顿偏微分方程，平均能量，平均散度，随机变分原理，随机多辛数值算法