多尺度问题的守恒型区域分解法

谢辉

摘要

在现代科学与工程计算中，区域分解算法已成为求解偏微分方程的重要工具。本文主要工作是设计了多尺度问题的有限体积法和混合元方法对应的离散代数系统的区域分解算法，包括算法的设计，理论分析以及数值模拟。具体可分为以下三个部分：

第一部分首先给出了Sobolev空间及向量有限元函数等一些预备知识，并以多尺度问题为例，简单介绍了有限体积法和混合元方法的离散格式和误差估计理论。其次介绍了两层重叠型区域分解算法的基本框架以及P-GMRES和P-MINRES这两种线性方程组迭代解法。

第二部分研究了多尺度问题有限体积法的两层区域分解算法。首先基于延拓算子，限制算子和校正算子构造了新的粗校正矩阵，并利用该矩阵以及一层的重叠型Schwarz算法构造了细尺度有限体代数系统的预条件子。然后在对偶粗网格上利用一些已有的多尺度方法具体构造了不同种的延拓，限制和校正算子。数值实验表明这些新的粗校正矩阵比文献中已有的算法更稳定，更适合处理复杂形状的间断系数。算法中的后处理迭代技巧可使得迭代解在每个粗网格单元上质量守恒，方便了速度场的局部重构。数值实验验证了几类粗校正矩阵的有效性。

第三部分设计了多尺度问题混合元方法的两层区域分解算法。原始鞍点系统经过等价变换后可得到一个新的鞍点系统，该系统可以用一个2×2的块对角矩阵的逆作为它的最优预条件子。该对角矩阵的第一块求逆对应于一个多尺度H(div)系统的求解，大规模计算下直接法求解是不现实的。针对这个多尺度H(div)系统设计了新的粗空间，证明了粗分解的能量稳定性。我们推导了加权的Helmholtz分解并借此证明了局部分解的稳定性，最后给出了预优H(div)系统的条件数估计，进而得到了预优鞍点系统的正负特征值分布区间的估计。数值实验验证了理论的正确性和有效性。

关键词：多尺度问题，有限体积法，混合元方法，区域分解预条件子，粗空间，条件数，谱分布