几类分数阶偏微分方程的有限元方法

卜玮平

摘要

相比整数阶导数，分数阶导数具有非局部的特性以至于非常适合描述一些具有遗传和记忆的现象. 迄今，分数阶微积分已成功应用于高能物理、反常扩散、粘弹性材料、系统控制、流变学、水力学、生物医学工程、金融等诸多领域. 由于应用极其广泛，分数阶微分方程已成为国际研究热点. 一般情况下分数阶微分方程的解析解含有特殊函数、复杂级数或者无显式表达式的Green 函数，这给实际计算带来极大不便. 因此，寻找分数阶微分方程的数值解越来越受到人们的重视. 本文主要研究几类分数阶偏微分方程的有限元方法.

第一章主要对分数阶微积分的发展历史和研究现状进行简要介绍.

第二章介绍分数阶导数的各种定义、性质及它们之间的转换关系，并引入一维和二维分数阶导数空间.

第三章对一类一维空间上的时间多项分数阶对流扩散方程构造Galerkin 有限元格式并作相应理论分析，然后利用V 循环多重网格方法对有限元格式导出的线性方程组进行求解并对V 循环多重网格方法进行收敛性分析，最后介绍一维区域上更一般分数阶微分方程有限元编程的主要步骤并给出了数值算例.

第四章研究一类二维分数阶FitzHugh-Nagumo 模型. 通过在时间方向上解耦，我们着重研究了一类二维分数阶反应扩散方程Crank-Nicolson ADI Galerkin 有限元格式的稳定性和收敛性，通过数值算例验证了这些理论结果.

第五章对一类二维分数阶扩散方程构造Galerkin 有限元格式并分析其收敛性. 我们对二维求解区域进行三角剖分并分别选取线性分片多项式和二次分片多项式为基函数，介绍了更一般二维分数阶微分方程有限元编程的主要步骤，通过数值算例验证了我们的理论分析结果.

关键词： 时间多项分数阶对流扩散方程; 分数阶FitzHugh-Nagumo 模型; 分数阶扩散方程; ADI 方法; 有限元方法; 多重网格方法