哈密尔顿系统辛几何算法的定性分析及其在等离子物理中的应用

张瑞丽

摘要

哈密尔顿系统的辛几何算法既能保持原系统的辛结构，又能将能量等系统不变量保持到很小的误差范围内。它为解决天体力学、分子动力学、等离子物理中的长期跟踪问题提供了可能，也因此为计算科学众多领域的研究人员所广泛接受。本博士论文研究了辛算法形式能量的收敛性问题，并且将辛算法应用于非线性薛定谔方程的孤立子运动和等离子体物理导心运动的模拟。

本文的主要研究成果包括：

1）基于冯康形式向量场和形式相流的理论，研究了辛算法理论中几十年来悬而未决的“形式能量的收敛性问题”。形式能量可以表示为时间步长的幂级数，其每一项都与一棵无根树相对应。借助 B-级数和 Bernoulli 函数，对形式能量中无根树的系数进行了收敛性分析。将所有高度为 1 的稠密树粘合到一棵给定的树后得到了一列新树。针对中点格式，证明了该列树的系数收敛于 0，而高度为 m ($m \geq 2$) 的稠密树的系数，随其分支个数以极大的速度趋于无穷大，并将该结论推广到一般的 Runge-Kutta 方法。从而否定了唐贻发等人早年的一个猜想，同时隐含了 Hairer 等人的估计式可达上界和形式能量的不收敛性。

2）Ablowitz-Ladik 模型(A-L 模型)是非线性薛定谔方程（NLSE）的一类完全可积的半离散模型，同时也是一个非正则 Hamilton 系统。对该模型的正则化在理论和实际应用方面都有比较重要的意义。本文针对正则化前后的 A-L 模型，分别采用了对称辛格式、对称非辛格式、非对称辛格式以及非辛非对称格式对其复杂孤立子运动以及系统不变量运行进行了数值模拟，显示了辛格式和对称格式相对于非辛非对称格式在长时间跟踪模拟以及保持不变量方面的压倒性优势。

3）磁化等离子物理中具有支撑性意义的导心系统是一个非正则哈密尔顿系统。几十年来，其正则化研究成为国际热点。以往的做法只限于理论忽略可操作性，或者只针对对称的磁场位形。本论文给出了导心系统正则化的一般理论，将导心系统的正则坐标表示成关于ε的级数形式，并递推地给出了正则化坐标的系数函数。在满足磁面假设的磁场位形中，递推过程在第二步终止，从而给出了精确的正则坐标。在此基础上，对正则化后的系统进行辛模拟。以偶极子场和托卡马克场为例，分别给出了其对应导心系统的正则坐标，并完成了正则辛模拟。通过与高阶非辛格式的数值结果相比较，显示了正则辛模拟对导心运动的模拟以及长时间不变量的保持方面相具有显著优势。