高频波计算的数值方法

向雪霜

摘要

Helmholtz 散射问题在科学工程领域有着重要的作用。当波数较大时，问题的理论分析和数值计算一直是计算数学界关注的难点。本文主要考虑高频波的数值计算方法。文章的主要内容有以下几部分：

完全匹配层方法是求解散射问题的一种重要方法，它将一个无界区域问题转化到有界区域上计算。本文的第一部分就是介绍在各向异性完全匹配层方法上的进展。各向异性完全匹配层方法在感兴趣区域外围构造一个连续的向量场，并沿着向量场方向进行复坐标延拓。我们提出了一种新的构造向量场的方法。基于此方法，我们不需要对完全匹配层的厚度有任何要求就能证明延拓格林函数的指数衰减性。并且该方法更适用于间断波数问题。我们给出了数值算例来验证方法的有效性。

针对无界 Helmholtz 问题的 PML 截断问题，我们提出并分析了一种新的区域分解算法(波源转移区域分解算法)。该方法首先将区域分解成不相交的若干层。所谓波源转移，指的是可以将波源等价的一层层从下向上转移，使得最后一层的解只和最后两层的波源有关。这样便可以通过在最后两层外围添加 PML 层来求解最后一层中的解。再通过最后一层的解和转移的波源从上到下一层层求解得到各层中的解。在常波数情况下，我们基于对 PML 问题格林函数的研究，得到了波源转移区域分解算法的收敛性分析。该方法可以作为求解常波数或变波数问题的一个高效的预条件子。我们给出了充分的数值算例来证实算法的有效性。最后我们给出了算法的一些扩展，包括间断波数问题，含散射体的散射问题，三维问题以及在 PHG 下并行实现。

文章的第三部分，我们给出了在二维时谐弹性波散射问题下算法的框架以及数值算例。在谱元法离散格式，算法可以作为一个高效的预条件子。同时我们也测试了算法解决变波数问题的效率。结果表明，算法是收敛的。这将对实际问题的求解有着重要意义。