摘　要

随机微分方程是物理、工程、金融等很多领域中十分重要的数学模型, 其数值方法是研究随机现象和随机问题的重要工具和关键手段, 具有十分重要的理论意义和广泛的应用价值. 近些年来, 随机微分方程的数值算法是计算数学研究的重点领域之一. 在此背景下, 本文进行了随机微分方程数值算法的若干研究, 尤其是研究了具有长时间数值模拟优势的保不变量、保辛等随机数值算法.

1. 针对一类 Stratonovich 意义下多维布朗运动驱动的随机微分方程, 基于 Kunita 关于随机微分方程解流的显式表达式构造数值算法. 当随机微分方程的系数函数向量场构成的李代数是有限阶幂零时, 我们截断系数函数构成的向量场, 然后将截断向量场进行分裂, 最后进行组合得到指数算子分裂算法. 我们构造了均方 0.5 阶、1.0 阶、1.5 阶强收敛的指数算子分裂格式. 对噪声是可交换的情形, 我们构造了均方 2.0 阶强收敛的指数算子分裂格式. 我们证明了这些格式的收敛性, 研究了这些格式的线性稳定性, 并证明了这些格式对随机哈密顿系统是辛的. 数值试验验证了我们的理论分析, 且展示了指数算子分裂算法在长时间模拟随机哈密顿系统时的优势.

2. 针对带有二次不变量的 Stratonovich 意义下多维布朗运动驱动的随机微分方程, 构造保二次不变量的随机 Runge-Kutta 方法. 对强收敛和弱收敛的随机 Runge-Kutta 方法, 我们分别给出保持原系统二次不变量的条件. 特别地, 我们构造出了保持原系统二次不变量的随机 Gauss 配置法. 对随机分块 Runge-Kutta 方法, 我们证明了保持原系统分块二次不变量的条件. 特别地, 我们提出了保持原系统分块二次不变量的随机 Labatto IIIA-IIIB 方法. 对二阶随机微分方程, 我们提出了随机 Nyström 格式, 并给出它保持分块二次不变量的条件. 运用我们提出的随机变分方程工具, 我们证明了保二次不变量的随机 Runge-Kutta 方法都是辛的. 基于理论分析, 我们构造了 0.5 阶强收敛和 1 阶弱收敛的保二次不变量随机 Runge-Kutta 格式. 对一维布朗运动驱动的随机微分方程, 我们构造了 1.0 阶强收敛和 2 阶弱收敛的保二次不变量随机 Runge-Kutta 格式. 数值试验证实了我们的理论分析, 显示了格式在长时间模拟带有二次不变量随机微分方程和随机哈密顿系统时的优势.

3. 针对带有二次不变量的 Stratonovich 意义下一维布朗运动驱动的随机微

分方程, 构造近似保持二次不变量的显式随机 Runge-Kutta 方法. 基于随机微分方程彩色根树的理论, 及随机变量列 p 阶矩收敛和逐点收敛之间的关系, 我们给出随机 Runge-Kutta 方法保持原系统二次不变量至任意阶的条件. 同时, 我们证明了这些随机 Runge-Kutta 方法是伪辛的. 结合随机 Runge-Kutta 方法强收敛阶条件, 我们分别构造了 1.0 阶强收敛保持原系统二次不变量至 2.0-ϵ 和 2.5-ϵ 阶的随机 Runge-Kutta 方法. 数值试验结果跟理论结果一致, 且表明当随机微分方程带有小噪声时, 近似保持二次不变量的显式随机 Runge-Kutta 方法是精确保持二次不变量的隐式随机 Runge-Kutta 方法比较好的替代方法.

关键词： 随机微分方程, 随机哈密顿系统, 指数算子分裂算法, 随机 Runge-Kutta 方法, 保二次不变量算法, 辛方法, 近似保二次不变量算法, 伪辛方法