非线性椭圆方程的自适应瀑布多重网格算法

秦泓杰

摘要

瀑布型多重网格法是求解大规模科学工程计算问题最有效的迭代算法之一。其优势在于无需粗网格校正，并且每层上的迭代次数可以预先设定，却又不影响解的精度与总体工作量。自适应有限元方法在偏微分方程的数值求解中，也发挥着极其重要的作用。它能通过后验误差估计子，来确定真解局部奇性的位置，从而用最小的工作量求得具有一定精度的数值解。

本文将瀑布多重网格法与自适应有限元算法相结合，基于两网格离散技巧，研究了自适应网格下，利用瀑布多重网格法来求解二阶非线性椭圆方程的可行性及有效性。文中首先考虑了一类最简单的二维半线性椭圆方程的边值问题，利用线性化技巧，将原问题转化为求解具有近似解的线性问题，并选取共轭梯度法作为光滑子，导出自适应瀑布多重网格法下的迭代步数。在此基础上，辅以一定假设条件，证明了在能量范数下，算法能达到最优收敛阶，以及最优工作量。随后，我们尝试将结论推广至更为一般的二维拟线性椭圆方程，在一定假设下，推导了算法的可行性、有效性。最后，数值实验也充分验证了我们的理论分析及算法的有效性。