保结构算法研究及其在等离子体物理中的应用

何洋

摘要

动力系统的保结构算法是能够保持系统内在结构特征的数值计算方法。本论文主要研究了两部分内容：可积离散和可积系统的计算方法；以及保结构算法在磁约束高温等离子体模拟中的应用。

第一部分针对可积动力系统，研究了由可积离散诱导的保可积性算法。可积系统在天体力学、流体动力学等多个学科中有重要应用；可积离散的概念来源于离散孤立子理论， 一般不被作为数值算法进行研究。本文以二维单摆系统和三维 Lotka-Volterra 系统为例，研究了一类由 Hirota 可积离散产生的数值算法，分析了数值解的数值计算效果和动力行为。结合向后误差分析理论，研究了数值解的几何特征，证明了数值解有以下性质：对二维情形，数值解在时间变换意义下是一个收敛的修正哈密顿系统的精确解；对三维情形，数值解轨迹拓扑同胚于一维不变环面，数值不变环面与精确不变环面的差距与数值方法同阶，且数值解的误差随数值积分时间呈线性增长。本结果给出了可积离散诱导的算法的数值计算有效性，为可积离散理论和数值方法的研究建立桥梁。

第二部分研究了磁化等离子体模拟的几何算法。磁化等离子体运动是磁约束热核聚变反应中的主要物理过程，由于模拟中多尺度问题的存在，构造具有守恒性质以及长时间稳定性的数值算法有重要意义。本部分研究了具有长时间稳定性的单粒子运动的模拟算法。具体包括以下两个工作：

1. 针对单粒子在电磁场中的运动方程，基于方程的解保持相空间体积不变的性质， 通过将系统分裂，构造了一类保体积算法。这类算法可显式求解；保持相空间体积不变；可以长时间保持能量、动量等守恒量的误差有界，且数值守恒量误差与算法具有相同的误差阶；计算得到的数值解的全局误差呈线性增长，优于一般数值算法的二次增长。此类保体积算法是对等离子体多尺度问题进行长时间模拟的有效算法，有助于真实模拟带电粒子在电磁场中的运动。算法的构造理念为磁化等离子体模拟提供了构造稳定高效的粒子推动算法的数学理论框架。

2. 针对单粒子在电磁场中的运动方程，基于二阶的保体积算法，应用 processing 技术构造了高阶保体积算法。构造的高阶算法具有多种守恒性质，且是显式的。相比于低阶算法，构造的高阶算法稳定性更好，在同等误差要求下计算量更小。 对二阶和四阶保体积算法进行稳定性和收敛性分析，通过多种算法比较列表给出比较结果，供算法使用者参考。本研究工作既为粒子推动问题构造了更高效的保体积算法，同时促进了 processing 技术在等离子体模拟的中的应用和发展。