可积系统相关领域若干交叉研究

常向科

摘要

可积系统是非线性科学的一个重要研究方向, 很多来自于物理、生物、纯数学和应用数学等方面的模型都可用可积系统来刻画. 最近, 可积系统与数学分支学科紧密的联系引起了广泛的研究兴趣, 例如可积系统与正交多项式关系密切, 一些早已熟知的微分差分方程、组合关系式、收敛加速算法也被发现就是可积系统. 这些交叉研究已为各个领域注入了新鲜的血液且促进了学科的发展.

本文将分为三部分分别报道我们最近在可积系统与组合数学、正交多项式、收敛加速算法交叉研究上的一些工作, 主要使用的工具是 Hirota 双线性方法 (或称直接方法) 以及行列式恒等式、Pfaff 式恒等式.

1 可积系统与组合数学方面:

(1) 很多离散可积系统具有代数组合中的 Laurent 性质, 以往证明 Laurent 性质的工具都是 cluster 代数. 从可积系统的角度出发, 我们猜测并证明了两个离散 KP 型可积系统——Somos-4,5 递推式具有显示封闭的 Hankel 行列式解, 从解得到了包括 Laurent 性质的一些结果, 此外, 我们还证明了 Somos-5 递推式可看做 Somos-4 递推式的一个特殊 Bäcklund 变换.

(2) 注意到 Somos-4、5 递推式的 Hankel 行列式解元素具有卷积递推结构, 我们研究了几个由具有卷积递推关系的组合序列作为元素的 Hankel 行列式, 解决了奥地利科学院院士 Cigler 的若干猜想.

2 可积系统与正交多项式方面:

(1) 通过引入某种新的正交性, 我们将正交多项式与两个可积系统——hungry 的 QD 算法 (dhQD 算法)、 一个与 QD-类型 hungry 的 Lotka-Volterra 方程 (dhLV 方程)相关的系统首次建立了联系, 利用此思想, 通过引入新正交性考虑限制在椭圆曲线上的双变量正交多项式, 我们也得到了一个推广的离散时间 Toda 高阶类比方程和一个推广的 QQD 格式.

(2) Camassa-Holm 方程可看做是连续可积系统与正交多项式相关的一个代表, 其主要表现在 Camassa-Holm 方程的 N 尖峰孤子解可由正交多项式表示, 这一结果是利用反散

射方法和连分式理论中的 Stieltjes 定理得到的. 我们从行列式的角度重新证明了这一结论, 并且利用一系列反向操作, 得到了一个推广的 Camassa-Holm 方程 , 此方程也有 N 尖峰孤子解, 其显示精确表达式可由正交多项式表示, 但不同于 Camassa-Holm 方程的是, 推广的 Camassa-Holm 方程拥有一个非等谱的 Lax 对.

3 可积系统与收敛加速算法方面:

(1) 从推广的 Lotka-Volterra 系统出发, 我们构造了新的序列变换并得到了对应的收敛加速算法, 此算法属于可积数值算法. 此外, 我们给出了收敛性稳定性分析以及数值实例.

(2) 目前已知的很多序列变换都可表示为行列式之比, 但我们发现一个已知的序列变换只能用比行列式更广的代数结构 Pfaff 式之比来表示而不能用行列式之比表示, 通过对 Pfaff 式进行高阶推广, 我们首次得到了新的 Pfaff 式之比表示的序列变换以及对应的收敛加速算法, 此外我们从数值上验证了算法的有效性.

(3) 以往的大多数序列变换或收敛加速算法都是利用外推法得到的. 我们从 ε-算法和 ρ-算法出发以一种新的差分的角度得到了一个新的收敛加速算法, 该算法递推关系式包含了 ε 算法、ρ-算法、 Osada 的广义 ρ-算法. 理论分析以及数值实例表明该算法对对数收敛序列、线性收敛序列、超线性收敛序列都加速有效, 这意味着比 ε 算法、ρ-算法、 Osada 的广义 ρ-算法应用范围广.