扩展有限元方法在间断问题中的分析与应用

王娅娜

摘要

实际应用中存在大量的间断问题，例如裂纹、位错、夹杂和孔洞等. 使用标准有限元方法求解时，要求网格必须能够描述区域的几何特性、材料变化等信息，并且只有当网格剖分足够细时才能够达到期望的精度. 对于一些涉及大变形或是动态模拟的问题，还需要不断地进行网格重构. 扩展有限元方法以其网格剖分独立于间断界面等特点，在这类问题的处理中展现出独特的优势并已被广泛应用. 然而，鲜见该方法的理论(数学)分析. 本论文将从以下三个方面对其进行研究:

首先，研究了扩充区域的选取对扩展有限元方法的影响. 我们考虑裂纹问题，该问题的解具有强间断性，即位移跨越裂纹是不连续的. 通过改进正则性结果和利用标准有限元方法的插值理论，对固定扩充区域的扩展有限元方法的收敛性进行了细致分析，明确给出该扩充区域对收敛阶的影响并指明其渐进趋于最优阶的收敛行为. 从理论上解释了在裂纹尖端选取固定的扩充区域数值方法将更为有效. 虽然上述分析都是基于直裂纹进行的，但是我们将其中一个至关重要的中间结果扩展到了任意弯曲裂纹上，使得弯曲裂纹问题的研究向前迈进一步.

其次，研究了扩充形函数的选取对扩展有限元方法的影响. 本部分考虑的界面问题具有弱间断性，即位移函数连续但其导数不连续. 通过构造反例来说明，选取强间断的扩充形函数逼近弱间断解时，扩展有限元方法可能不会收敛. 通过研究以阶跃函数作为扩充函数的扩展有限元方法与界面上设置双重节点的标准有限元方法之间的关系，我们分析了导致不收敛现象的本质原因以及可采取的算法调整策略.

最后，将扩展有限元方法应用于裂纹薄膜的自由振动分析中，计算对应的裂纹区域上特征值问题的特征值和特征向量. 应用紧算子的谱理论、最小最大值原理和第一部分的研究结果对计算结果进行误差分析. 进一步，分析了裂纹的长度和位置对薄膜自由振动的影响.

关键词: 扩展有限元方法，间断问题，裂纹问题，界面问题，特征值问题，收敛性分析