Helmholtz 方程的杂交间断 Galerkin 有限元方法

卢培培

摘要

在现代科学与工程计算中，间断 Galerkin(DG)有限元方法是一个重要的研究方向。杂交间断 Galerkin(HDG)有限元保持了 DG 有限元的优点，同时减少了自由度。本文的主要工作是研究 HDG 有限元方法离散大波数 Helmholtz 方程，包括离散格式的收敛性分析，以及相应代数系统的多水平预处理方法。本文将从算法设计、理论分析和数值实验等方面进行研究，具体可分为如下三个部分。

第一部分首先给出了有限元方法的一些背景知识，以二阶椭圆边值问题为模型，简单介绍了杂交有限元方法，然后针对本文的 HDG 有限元方法给出其离散代数系统的条件数估计，最后介绍了多水平算法的基本框架并简单介绍了 GMRES 方法。

第二部分运用 HDG 有限元方法离散大波数 Helmholtz 方程。通过选取合适的参数，证明了 HDG 有限元离散格式解的存在唯一，且在不受网格限制的条件下，是无条件稳定的。利用此稳定性分析，我们进一步得到了 HDG 有限元方法的收敛速度与波数、多项式次数及网格尺寸的关系，数值实验表明该理论与实验结果相匹配。

第三部分研究了 Helmholtz 方程 HDG 有限元离散代数系统的多水平算法。根据网格尺寸，选择不同的光滑子，在较细的网格上采用 Gauss-Seidel 或加权 Jacobi 磨光；当网格较粗以至于不能抓住波的性态时，采用 GMRES 磨光。通过选择合适的转移算子，构造出有效的多水平算法，并以此作为 GMRES 迭代的预条件子。在一维情形，利用局部傅立叶分析，给出算法收敛性的量化分析，数值实验也充分验证了算法的有效性。

关键词：杂交有限元，多水平方法，预条件子，大波数，Helmholtz 方程，误差估计