Maxwell 方程特征值问题的混合谱元方法

刘娜

摘要

有限元方法是求解包括 Maxwell 方程在内的边值问题最有效的算法之一，本文的主要工作是研究一种特殊的有限元方法---谱元方法在计算 Maxwell 方程特征值方面的应用，包含如下两部分内容：

一、求解特征值问题时，对电场强度 E 与磁场强度 H 采用交错阶基函数逼近，记交错阶方法为 EmHn，如果 m=n，则数值结果含有非零的伪特征值；如果 m 不等于 n，则无非零伪解出现。我们对这一现象的理论解释是：运用棱元方法时，E 与 H 的有限元离散空间应包含 Curl 算子的零空间，并应满足一阶方程的包含结构关系。另外，我们给出了 1D 与 3D 的色散关系式，从物理色散图可直观判断是否存在伪解。

二、基于 Kikuchi 提出的混合有限元格式，我们采用 Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) 正交多项式基函数的谱元方法，消除了所有的伪特征值。在 2D 和 3D 矩形腔体、L 形奇性腔体、非均匀介质腔体及同轴腔体中的数值结果显示，当腔体特征值对应解析的特征函数时，数值解具有谱精度，即随着谱元基函数阶数的增加，数值特征值相对误差呈指数衰减。如所熟知，L 形腔体使得某些特征函数无界，从而对应的特征值丧失谱精度；而同轴腔体使得方程本身就含有一个物理的零特征值，当经典的棱元变分格式不考虑散度条件时，真实的零特征值与伪零特征值混在一起。特别地，零特征值所对应的特征向量与伪零特征值所对应的特征向量组合在一起，无法有效地找到真实的场分布。我们设计的混合谱元格式包含散度的弱形式，避免了伪零特征值的出现，可成功地抓到真实的零特征值及其对应的场分布图。混合谱元方法除了具有谱精度外，当实际应用中只需最低的几个特征频率及其模式时，相比于普通谱元方法和棱元方法，它在内存使用和 CPU 时间消耗方面也具有很大的优势。

关键词： Maxwell 特征值问题，混合阶基函数，色散关系，混合谱元方法，伪特征值