特征值问题和相场方程的一些研究

罗福生

摘要

利用计算机辅助的数值方法求解微分方程在现代科学、技术、工程中扮演重要角色。差分方法以及之后出现的有限元方法是有效的数值算法，用以处理包括特征值问题，以及一些非线性方程等。对特殊的问题采用特别的方法，能够达到提高收敛精度，加快模拟速度的目的。

本文首先研究特征值问题的下界逼近，对于 Stokes 特征值问题的混合元方法，给出对应的特征值展开式。利用这个展开式，在三角形网格和矩形网格上，各分析了两种非协调元对特征值问题的求解，得到下界逼近的结论。

第二部分讨论如何同时得到对特征值问题的上界和下界，从而得到精确的有效位数。此处，我们讨论 Laplace 特征值问题，先利用非协调元得到下界，然后利用协调元提出包括直接求解方法以及两种后处理方法。利用后处理方法配合适当的有限元空间，我们可以得到特征值上界，从而得到精确的有效位数，并达到减小计算量和提高收敛阶数的目的。

最后我们讨论相场方程中的时间自适应方法。对于 Cahn-Hilliard 模型，利用方程本身具有的性质，提出一种基于等能量下降的时间步长自适应方法，结合已有的 Crank-Nicolson 格式、凸分裂格式，通过数值实验显示这种做法能减小长时间模拟所需要的计算时间。对于 molecular beam epitaxy(MBE) 模型，同样给出类似的方法，额外还利用粗粝度的变化给出另外一种时间步长自适应方法，数值实验显示两种算法效果类似，且都能减小长时间模拟所需要的计算时间。

关键词： Stokes 特征值问题，特征值下界，特征值上界，Cahn-Hilliard 方程，Molecular beam epitaxy 方程，时间自适应