带有随机输入的偏微分方程的数值解法

近几年，关于如何处理带有不确定性因素的数学模型的研究发展非常迅速。这项研究在工程，计算生物，计算金融等诸多领域取得了大量成功的应用。本文考虑带有不确定性（随机）输入的偏微分方程（随机偏微分方程），主要针对数值方法和数值分析方面。我们主要进行了以下研究工作：

1）第一，对于随机椭圆方程，我们证明了使用多项式混沌方法之后形成的系数矩阵的对角占优性质。这是在一些基本的假设（为大多数研究者所采用）下实现的。在实际应用中由于对角占优性质，我们可以对于形成的方程组进行分裂或者迭代设计，这样的算法高效，并且避免了求解联立的方程组。这对于多项式混沌方法是一个非常关键的改进。这个问题实际上源于沈捷教授与修东滨教授在其 JCP 文章中提出的一个“open question”。

2）第二，对于带有随机传导速度的一维传输问题，我们准确地给出了此问题在随机空间的正则性，包括其精确解属于随机希尔伯特（Hilbert）空间和随机有界变差（BV）空间所需要的初始条件和边界条件的正则性。我们用这些正则性结果分析多项式混沌方法及随机配点法的收敛性质，得到了准确的收敛阶。此后我们将这个问题进行推广，同样给出速度是一个随机区域的传输问题的解的正则性，并对这个问题设计了基于双正交多项式的混沌方法。通过对随机空间的敏感性分析，我们发现每个随机方向的重要性不同，这就使得我们可以各向异性地选取相应的基函数的个数，于是整体的自由度可以大大减少，从而使得算法高效。实际这种选取自由度的方式对于大部分线性问题以及许多其他数值方法都具有参考意义。同时，对于非线性问题有时也可以做这样的尝试。最后，我们在理论上也证明了多项式混沌方法和随机配点法对于线性双曲问题的指数收敛性。

3）我们考虑了带有间断界面（interface）的随机椭圆问题,同样采用带有随机空间自适应的双正交多项式混沌方法求解。同时，我们也提出了具有随机界面的问题。在一类情况下，我们可以将此类问题转化为带有固定界面和随机系数的椭圆问题。一般情况下的界面随机移动的问题，将作为我们以后研究工作的一部分。